

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова

Физический факультет

Кафедра небесной механики, астрометрии и гравиметрии

На правах рукописи

УДК 524.882

ХОВАНСКАЯ Ольга Сергеевна

**ВОЗМОЖНЫЕ  
НАБЛЮДАТЕЛЬНЫЕ  
ПРОЯВЛЕНИЯ СИЛЬНЫХ  
ГРАВИТАЦИОННЫХ ПОЛЕЙ**

Специальность *01.03.01* — *астрометрия и небесная механика*

Научные руководители:

д.ф.-м.н. САЖИН М.В.

к.ф.-м.н. АЛЕКСЕЕВ С.О.

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

*кандидата физико-математических наук*

Москва 2003

# Введение

## Актуальность темы

В последние годы релятивистская гравитация все более сближается с физикой элементарных частиц. Этот процесс связан с попытками создать единую и самосогласованную теорию всех известных физических взаимодействий. Одним из самых перспективных и многообещающих подходов для решения этой фундаментальной задачи современной физики является теория суперструн [1] - [7]. Основные выводы этой теории лежат в области физики высоких и сверхвысоких энергий, тем не менее, часть предсказаний теории суперструн, или струнной гравитации, принадлежит области макроэффектов [8]. Поиск эффектов, которые могли бы наблюдаться современными астрономическими методами, и являются целью предлагаемой работы.

Последовательное объединение физических взаимодействий с ростом энергии тесно связано с этапами развития Вселенной. Стадия инфляции [9] может быть описана в рамках физических моделей сверхвысоких энергий, например, с помощью суперсимметричных теорий [10]. Процессы, происходившие на еще более ранних этапах развития Вселенной, на планковских масштабах, требуют модификации классической общей теории относительности (ОТО). Эти процессы должны найти адекватное описание в рамках квантовой гравитации, которая, в силу неперенормируемости ОТО (то есть из-за несовместимости понятий волновой функции частицы или вероятностного определения ее пространственно-временной координаты с понятием материальной

точки в ОТО), в качестве одного из подходов может быть реализована с помощью теорий высших размерностей, например, теории суперструн [1] - [7] (или ее обобщения — М-теории [3], [11]-[12]).

Согласно теории суперструн, вместо того, чтобы рассматривать различные элементарные частицы как одномерные пространственно-временные объекты, частицы рассматривают как различные колебательные моды некоторого нового двумерного пространственно-временного объекта — струны. Частота каждой моды определяет частицу и ее энергию. Типичный продольный размер струны очень мал — порядка планковской длины (около  $10^{-33}$  см); таким образом, при низких энергиях струна практически неотличима от одномерной пространственно-временной частицы. В теории суперструн полагают, что все известные физические взаимодействия осуществляются не с помощью частиц-переносчиков, а с помощью струн. Спектр струны содержит безмассовое состояние спина 2, обладающее всеми свойствами гравитона — переносчика гравитационных взаимодействий. Следовательно, гравитация включается в теорию суперструн естественным образом, как одна из степеней свободы.

Суперсимметричные теории с супергравитацией могут существовать в десятимерном геометрическом пространстве-времени с определенной группой, например,  $SO(32)$ , описывающей гетеротические струны [2]. Такую десятимерную теорию можно компактифицировать для использования в четырехмерном пространстве-времени [1].

В общем случае компактификация — это процесс, при котором многообразие  $R^n$  факторизуется на решетку [3]. Простейшая компактификация была введена Калуцей, который компактифицировал пятимерное многообразие до четырехмерного пространства-времени, сделав пятое многообразие периодическим. В зависимости от выбранной решетки компактифицированное многообразие имеет симметрию, соответствующую этой решетке. Например изоспин можно ввести с помощью компактификации [3]. Компактификация позволяет редуцировать

десятимерную струну к четырехмерной теории, ”свернув” шесть измерений. Компактификация играет ключевую роль в получении осмысленной феноменологии на струне. Таким образом, метод стандартной компактификации десятимерного пространства (модель типа Калуцы-Клейна) заключается в том, что шесть из рассматриваемых десяти измерений являются малыми и компактными и могут проявиться в реальных наблюдениях только при очень больших энергиях, а оставшиеся четыре измерения являются протяженными и устойчивыми при низких энергиях.

После компактификации десятимерного пространства в наблюдаемые четыре измерения, теория струн описывается низкоэнергетическим (энергии много меньше  $10^{19}$  ГэВ) эффективным действием, обобщающим классическое действие Эйнштейна-Гильберта. В дополнение к эйнштейновскому члену (скалярной кривизне  $R$ ) это новое действие обычно включает в себя скалярные поля-модули, представляющее собой ”след” от компактификации высших размерностей, поля Янга-Миллса, скалярное дилатонное поле и поправки высших порядков по кривизне в различных сочетаниях.

В полученной модели четырехмерной струнной гравитации с обобщенным лагранжианом (так называемый пертурбативный подход) струнная теория предсказывает, что уравнения Эйнштейна модифицируются с помощью поправок высших порядков по кривизне в областях, где кривизна приближается к планковским значениям. При этом для бозонных и гетеротических струн наиболее значимой является поправка второго порядка, представляющая собой специального вида линейную комбинацию квадратов тензоров Римана и Риччи и скалярной кривизны (член Гаусса-Бонне), умноженную на некоторую функцию скалярного дилатонного поля. Иначе говоря, для того, чтобы построить полуклассическую гравитационную теорию, классический лагранжиан должен быть обобщен, что можно сделать различными способами, и один из способов — это рассматривать действие в виде ряда по кри-

визне, то есть вводить в лагранжиан поправки по кривизне высших порядков (пертурбативный подход).

Современная наблюдательная космология основана на четырехмерной стандартной модели ОТО и, казалось бы, не требует введения дополнительных размерностей. Однако не противоречащая наблюдательным данным теория инфляции вводит некое дополнительное скалярное поле — инфлатон [13] - [14]. Введение этого поля может быть окончательно обосновано только при глубоком понимании физических процессов при сверхвысоких энергиях, где классическая ОТО выходит за границы применимости. В целом, характерные для ранней Вселенной процессы при сверхвысоких энергиях не могут найти адекватного описания в рамках классической ОТО, необходимо привлекать другие, обобщенные теории, способные "работать" на планковских масштабах. Полная суперсимметричная струнная теория, использующая математический аппарат абстрактных теорий высших размерностей, пока не имеет экспериментальных подтверждений. Тем не менее, эта теория может быть применена для описания процессов на планковских энергиях и после компактификации может описывать четырехмерное пространство-время.

Таким образом, перед современной физикой стоит важнейшая задача объединить наблюдательную космологию и абстрактные теории высших размерностей, найти, в частности, экспериментальные следствия теории струн.

Одной из связующих нитей являются первичные черные дыры (ПЧД) [15] - [19].

Возможно существование черных дыр с массами, меньшими массы Солнца [20], хотя они и не могли бы образоваться в результате гравитационного коллапса, так как величины их масс лежат ниже предела Чандрасекара [21]. Такие ПЧД микроскопических размеров могли сформироваться в результате коллапса нерегулярностей на ранних этапах развития Вселенной, а именно в период инфляции, за счет кван-

товых флуктуаций плотности [19].

В настоящее время ПЧД, наряду с такими объектами как космические струны [22] - [23] и "кротовые норы" [24] - [25] рассматриваются как кандидаты на роль темной материи в нашей Вселенной.

Существует много свидетельств в пользу существования галактических черных дыр звездных масс [26] - [27], однако наблюдательных данных, подтверждающих существование черных дыр микроскопических размеров, пока не найдено, хотя такие объекты и предсказываются в рамках стандартной космологической модели — базе современной наблюдательной космологии.

За счет квантовых эффектов в гравитационном поле, шварцшильдовская, незаряженная и не вращающаяся черная дыра, способна излучать частицы, "испаряться", согласно теории Хокинга [20], [28] - [33]. Существуют два стандартных приближения излучения Хокинга: геометрия коллапса и погружение в "тепловую баню" [34] - [35]. Для обоих этих приближений необходимо определить процесс излучения как туннелирование, основанное на свойствах частицах в динамической геометрии. Положительная энергия испускаемого излучения должна уравниваться потоком частиц с отрицательной энергией, направленным в черную дыру. Поток отрицательной энергии уменьшает массу черной дыры, и, кроме того, чем меньше масса черной дыры, тем выше ее температура [20]. Следовательно, когда черная дыра теряет массу, ее температура и скорость излучения возрастают, и потеря массы идет еще быстрее. Таким образом, процесс излучения, а так же и другие квантовые эффекты, наиболее существенны именно для дыр малой массы, то есть, для ПЧД.

В настоящее время в наблюдательной космологии существует ряд эффектов, которые естественным образом могли бы быть объяснены с помощью ПЧД. Так, фотоны, излучаемые при "испарении" ПЧД, могут дать диффузное фоновое излучение во Вселенной [36] - [37]. ПЧД могут концентрироваться около старых звезд и могут давать вклад

в холодную темную материю [38]. ПЧД могут служить причиной коротких вспышек  $\gamma$ -излучения [39] - [40], а именно: согласно Хокингу, температура ПЧД ( $T$ ) обратно пропорциональна массе ПЧД ( $M$ )  $T = 10^{10}/M$  ТэВ. Короткие вспышки  $\gamma$ -излучения могут проявляться, если  $T \sim 160$  ГэВ (фаза кварк-глюонного перехода) или  $T$  принадлежит "окну" 10 ГэВ — 1 ТэВ. Формирующаяся вблизи ПЧД плазма создает магнитное поле, что приводит к  $\gamma$ -излучению [41] - [42].

Одной из самых загадочных проблем современной теоретической физики является вопрос о конечной стадии хокинговского испарения ПЧД. Дело в том, что, в соответствии со стандартным сценарием и формулой Хокинга [20], ПЧД должны испаряться полностью. В то же время ряд моделей [43] - [50] предсказывает наличие нижнего предела на возможную массу черной дыры.

Рассмотрим модель пертурбативного приближения теории струн.

Как было сказано ранее, данная модель предсказывает, что уравнения Эйнштейна модифицируются с помощью поправок высших порядков по кривизне в областях, где кривизна приближается к планковским значениям. При этом наиболее значимым является член Гаусса-Бонне как квадратичная поправка по кривизне. Исследованию влияния этой поправки по кривизне на вид решения в космологии и в физике черных дыр было посвящено множество исследований. В частности, были получены новые решения, содержащие принципиально новые типы сингулярностей [51] - [58], отсутствующие в классической ОТО. Найденные решения помогли обнаружить ограничение снизу на минимально возможное значение массы черной дыры, не зависящее от параметризации метрики, то есть от выбора системы координат. Это ограничение получается за счет наличия новой сферической детерминантной сингулярности [43]. В отличие от координатной сингулярности на горизонте событий черной дыры, найденная сферическая сингулярность не устраняется с помощью координатных преобразований. В сферической детерминантной сингулярности, так же как и в центральной сингулярнос-

ти черной дыры в классической ОТО, кривизна пространства-времени стремится к бесконечности.

Наличие ограничения на минимально возможную массу черной дыры говорит о том, что в модели струнной гравитации центральная "голая сингулярность" не образуется (то есть центральная сингулярность всегда остается скрытой от внешнего наблюдателя). Применительно к ПЧД полученное ограничение на массу позволяет получить чрезвычайно важное заключение. Излучая согласно механизму Хокинга, такая черная дыра микроскопических размеров не может испариться полностью, а только лишь до некоторого реликтового остатка порядка планковского размера [59] - [60]. В этом случае к настоящему моменту времени в нашей Вселенной существуют реликтовые остатки ПЧД, и они могут составлять значимую часть темной материи во Вселенной. Также важной задачей представляется анализ возможностей экспериментального поиска современными астрономическими методами реликтовых остатков ПЧД по продуктам их хокинговского испарения и, на основе модели струнной теории, получение числовых оценок реальных физических величин, которые могли бы быть измерены в ходе возможных экспериментов.

Таким образом, "математический" результат теории суперструн о существовании предельной массы может быть применен в современной космологии для изучения реликтовых остатков первичных черных дыр. Теория струн предоставляет нам уникальный естественный механизм образования реликтовых остатков ПЧД.

Важно отметить, что наличие минимальной массы не является эффектом только комбинации члена Гаусса-Боннэ и дилатонного скалярного поля, ограничение на массу остается и при учете более высоких поправок по кривизне, а также полей-модулей, и размер горизонта несколько увеличится [45], [61]. Таким образом, в более полных моделях минимальная масса черной дыры переходит в область полуклассического приближения, "уходит" от "опасной" планковской области, вблизи



которой невозможно было бы с определенностью говорить о существовании (в классическом смысле) самого остатка из-за становящихся доминирующими квантовых флуктуаций пространства-времени.

Следовательно, ограничение на массу черной дыры действительно есть фундаментальный результат теории струн.

Для построения наиболее полной модели ПЧД в четырехмерной струнной гравитации, а также для поиска связей этой модели с наблюдательной космологией, необходимо изучать эволюцию найденных решений во времени, что является довольно сложной технической задачей. Тем не менее, можно получить общие свойства изменения со временем этих решений, изучая устойчивость относительно малых временных возмущений окрестностей как регулярного горизонта событий, так и сферической детерминантной сингулярности.

Исследования модели со скалярным дилатонным полем и двухпетлевой поправкой по кривизне методами вариаций метрических функций и методами теории катастроф подтвердили линейную устойчивость горизонта событий черной дыры относительно линейных, зависящих от времени возмущений [62], [63]. Вопрос об устойчивости сферической сингулярности до недавнего времени оставался открытым.

Также необходимым условием для возможных дальнейших попыток экспериментального обнаружения ПЧД является поиск связей параметров ПЧД с параметрами стандартной космологической модели.

Таким образом, решение типа "черная дыра", полученное в рамках обобщенной модели Эйнштейна-Гильберта, а именно в четырехмерной струнной гравитации с дополнительным скалярным дилатонным полем и высшими поправками по кривизне, может быть применено к исследованию реликтовых остатков ПЧД, сформировавшихся в ранней Вселенной за счет флуктуаций плотности. Это исследование необходимо для установления прочных связей современной наблюдательной космологии и релятивистской гравитации с "математическими" теориями высших размерностей, в частности, с теорией суперструн.

## Цель исследования и общая постановка задачи

Целью данной работы является следующее:

1. В рамках четырехмерной струнной гравитации, в обобщенной модели Эйнштейна-Гильберта с двухпетлевой поправкой по кривизне и дилатонным скалярным полем получить полную непротиворечивую теоретическую модель ПЧД (первичных черных дыр), а именно:
  - (a) исследовать устойчивость окрестности сферической детерминантной сингулярности ПЧД относительно малых временных возмущений. Получить общий вывод об устойчивости относительно малых временных возмущений и об эволюции во времени реликтового остатка ПЧД;
  - (b) получить связи параметров стандартной космологической модели ранней Вселенной с ПЧД. А именно, исследовать связь температуры Вселенной на стадии разогрева (reheating) с массой ПЧД на этой стадии и выяснить условия, при которых реликтовые остатки ПЧД успевают образоваться к настоящему моменту времени согласно стандартной космологической модели;
  - (c) построить и проанализировать модель испарения ПЧД, основанную на аналитических и численных решениях полевых уравнений,
2. В рамках четырехмерной струнной гравитации, в обобщенной модели Эйнштейна-Гильберта с двухпетлевой поправкой по кривизне и дилатонным скалярным полем проанализировать возможность прямых экспериментальных поисков продуктов излучения реликтовых остатков ПЧД и рассмотреть реликтовые остатки ПЧД как кандидатов в темную материю в нашей Вселенной.

## **Научная новизна и практическая значимость**

Поиск экспериментальных следствий теории струн, а именно: построение законченной непротиворечивой модели первичных черных дыр в рамках четырехмерной струнной гравитации, а также получение связей полученной модели со стандартной космологической моделью и анализ ее экспериментальных следствий.

## **Апробация результатов**

1. МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ ПО ГРАВИТАЦИИ И КОСМОЛОГИИ, Москва, Россия, 1-7 октября 2000 года;
2. КОСМОЛОГИЯ В М-ТЕОРИИ, Кембридж, Великобритания, август 2001 года;
3. НАУКА И РЕАЛЬНОСТЬ, симпозиум, посвященный 90-летию Дж. Уиллера, Принстон, Нью-Джерси, США, 15-18 марта 2002 года (участие в конкурсе молодых ученых, премия им. Питера Грубера);
4. НОВЫЕ РУБЕЖИ ФИЗИКИ РЕЛИКТОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ, Коллеж де Франс, Париж, Франция, 25 марта - 19 апреля 2002 года.
5. XXI ТЕХАССКИЙ СИМПОЗИУМ ПО РЕЛЯТИВИСТСКОЙ АСТРОФИЗИКЕ, Флоренция, Италия, 9-13 декабря 2002 года.
6. СЕМИНАР ПО ГРАВИТАЦИИ И КОСМОЛОГИИ ПАМЯТИ А.Л. ЗЕЛЬМАНОВА, 12 февраля 2003 года.

## **Личное участие и публикации**

Постановка задачи и анализ полученных результатов главы II, посвященной исследованию устойчивости реликтового остатка ПЧД, прове-

дены автором совместно с М.В. Сажиним и С.О. Алексеевым. Выбор методов исследования устойчивости и все расчеты проделаны автором.

Постановка задачи, вычисления и анализ полученных результатов главы III, посвященной поиску связей ПЧД с параметрами стандартной космологической модели, проделаны совместно с М.В. Сажиним.

Постановка задачи и анализ полученных результатов главы IV, в которой описывается простейшая модель испарения ПЧД, проделаны совместно с М.В. Сажиним и С.О. Алексеевым, все расчеты проведены автором.

Результаты главы V, которая посвящена разработке полной модели испарения ПЧД, написана совместно с М.В. Сажиним, С.О. Алексеевым, а также О. Барро, Г. Будул (Институт Ядерной Физики, Университет Дж. Фурье, Гренобль, Франция). Автору принадлежит получение аналитического выражения для полуклассического действия и его аппроксимационного выражения.

Представленные результаты диссертации полностью изложены в следующих российских и зарубежных журналах:

1. Alexeyev S.O., Khovanskaya O.S. "Additional study of a restriction on the minimum black hole mass in string gravity" ("Дополнительное исследование ограничения на минимальную массу черной дыры в струнной гравитации") // Grav. Cosmology, т. 6, No 1 (21), стр. 14-18, 2000.
2. Khovanskaya O.S. "Black holes in higher curvature gravity" ("Черные дыры в гравитации с высшими поправками по кривизне") // Proceedigs, Grav. Cosmology, т. 8, приложение II, стр. 67-68, 2002.
3. Алексеев С.О., Сажин М.В., Хованская О.С. "Параметры ранней вселенной и первичные черные дыры" // Письма в Астрономический Журнал т. 28, No. 3, стр. 163-166, 2002.
4. Khovanskaya O.S. "Dilatonic black hole time stability" ("Устойчи-

вость дилатонных черных дыр относительно временных возмущений”) // Grav. Cosmology, т 8, No. 3 (31), стр. 197-200, 2002.

5. Алексеев С.О., Баррау А., Боудоул Г., Сажин М.В., Хованская О.С. ”Простейшая модель испарения черных дыр на последних стадиях” // Письма в Астрономический Журнал т. 28, No. 7, стр. 489-494, 2002.
6. Alexeyev S.O., Barrau A., Boudoul G., Khovanskaya O.S., Sazhin M.V. ”Black-hole relics in string gravity: last stages of Hawking evaporation” (“Реликтовые остатки черных дыр в струнной гравитации: последние стадии испарения Хокинга”) // Class. Quantum Grav. т. 19, стр. 4431-4443, 2002.

## **Структура и объем диссертации**

Диссертация подразделяется на введение, пять глав, а также включает в себя заключение, положения, выносимые на защиту, благодарности, приложение и библиографию (118 ссылок). Общий объем диссертации — 113 страниц.

Введение включает в себя описание актуальности темы, формулирует цель исследования и общую постановку задачи, а также научную новизну и практическую значимость работы, список апробаций результатов, список публикаций и степень личного участия в работе над диссертацией. Глава I является обзорной по современным моделям четырехмерной струнной гравитации. Особое внимание уделяется решениям типа ”черная дыра” в обобщенной модели Эйнштейна-Гильберта с дополнительным скалярным дилатонным полем и высшими поправками по кривизне. Глава II посвящена исследованию устойчивости относительно малых временных возмущений особых точек решения типа ”черная дыра” в рамках исследуемой модели. Глава III включает в себя изучение связи массы первичных черных дыр с температурой разогре-

ва (reheating) в постинфляционную эпоху. В главах IV и V описываются модели "испарения" черной дыры: простейшая модель, сформулированная в рамках классического приближения (излучение Хокинга), но с использованием результата об ограничении снизу на минимальную массу черной дыры, и далее, полная модель излучения в рамках исследуемой модели в приближении Венцеля-Крамера-Брилюен. В заключении к диссертации акцент делается на связь первичных черных дыр с решениями типа "черная дыра" в обобщенной модели Эйнштейна-Гильберта с дополнительным скалярным дилатонным полем и высшими поправками по кривизне, а также анализируется возможность прямых экспериментальных поисков продуктов излучения реликтовых остатков первичных черных дыр и их рассмотрение как кандидатов в темную материю в нашей Вселенной.

## Условные обозначения и определения

В данной диссертации используются следующие обозначения и определения.  $\hbar$  - постоянная Планка,  $c$  - скорость света,  $G$  - гравитационная постоянная,  $m_{Pl}$  - масса Планка,  $\lambda$  - струнная константа связи при учете двухпетлевой поправки в обобщенном действии Эйнштейна-Гильберта,  $\lambda_2 = \lambda$ ,  $\lambda_i$  - струнные константы связи при учете высших поправок  $\{i = 3, 4, \dots\}$  по кривизне в обобщенном действии Эйнштейна-Гильберта. В диссертации, кроме главы IV, посвященной оценке температуры разогрева, и параграфов, посвященных анализу и поиску экспериментальных следствий построенной модели (глава V), используется система единиц:  $\hbar = c = G = 1$ ; при выводе уравнений поля полагается также  $m_{Pl} = \lambda = 1$ .

Греческие индексы  $\{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}$  принадлежат множеству натуральных чисел  $\{1, 2, 3, \dots\}$ . Латинские индексы  $\{i, j, k, \dots\}$  принадлежат множеству целых неотрицательных чисел  $\{0, 1, 2, \dots\}$ .

Тензор кривизны:

$$R_{iklm} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x^k \partial x^i} + \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x^i \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^k \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{km}}{\partial x^i \partial x^l} \right) + g_{np} (\Gamma_{kl}^n \Gamma_{im}^p - \Gamma_{km}^n \Gamma_{il}^p),$$

тензор Риччи:

$$R_{ik} = \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{il}^l}{\partial x^k} + \Gamma_{ik}^l \Gamma_{lm}^m - \Gamma_{il}^m \Gamma_{km}^l,$$

скалярная кривизна:

$$R = g^{ik} R_{ik},$$

$g_{ik}$  - метрический тензор,  $g^{ik}$  - обратный метрический тензор,  $g$  — определитель метрического тензора,  $\Gamma_{km}^l$  - символы Кристоффеля.

В главе V  $\Im S$  — мнимая часть выражения  $S$ .

# Глава 1

## Первичные черные дыры и решение типа ”черная дыра” в струнной гравитации

### 1.1 Четырехмерные модели струнной гравитации

#### 1.1.1 Введение

В последние годы подходы к изучению микромира и макромира оказываются тесно связанными. Как известно [8], основным свойством теорий элементарных частиц является возрастание эффективной симметрии теории с ростом энергии. Электричество и магнетизм являются единым взаимодействием, электромагнитные и слабые взаимодействия объединяются при энергиях порядка  $10^{11}$  эВ (модель Вайнберга-Салама-Глешоу) [8], электрослабые и сильные взаимодействия, согласно современным теоретическим представлениям, объединяются в рамках модели суперсимметрии (симметрия ”бозон — фермион”) при энергиях  $10^{24}$  эВ. Наша Вселенная в своем развитии проходила последовательные стадии спонтанного нарушения симметрии всех указанных взаимодействий с уменьшением энергии. Так, например, процесс отделения сильного взаимодействия от электрослабого приходится на время  $10^{-37}$  сек —  $10^{-10}$  сек с момента большого взрыва. Стадия инфляции, начавшаяся во время  $10^{-35}$  сек от большого взрыва, может найти естес-



твенное описание в рамках суперсимметричных теорий сверхвысоких энергий [10].

### 1.1.2 Проблемы квантования общей теории относительности

К настоящему времени законченной квантовой теории гравитации не создано. Дело в том, что общая теория относительности (ОТО) неперенормируема, то есть ее прямое квантование, стандартное для квантово-механических полевых теорий, невозможно [1]. Неперенормируемость ОТО связана с тем, что теория, содержащая точечные объекты (фермионы), расходится при энергиях выше энергии Планка. Говоря языком дифференциальной геометрии, ОТО требует дифференцируемости пространственно-временной метрики (гравитационного поля), тогда как в квантовом подходе при описании полевых величин траектории имеют фрактальный характер, то есть, не дифференцируемы, и понятие классической траектории заменяется волновой функцией — вероятностью обнаружения частицы в некотором неинфинитизимальном объеме пространства-времени.

Вообще говоря, квантовая теория поля требует понятия о полях времениподобных векторов Киллинга для определения частиц. В пространстве Минковского существование глобальных времениподобных векторов Киллинга, инвариантных относительно преобразований Лоренца, приводит к возможности определить предпочтительное вакуумное состояние для теории [64]. Состояния частиц — в определенном вакуумном состоянии — может быть определено, используя поля векторов Киллинга. Эти определения не будут эквивалентными, и окажется, что вакуум Минковского будет соответствовать нескольким состояниям частиц. В обобщенном искривленном пространстве-времени полей времениподобных векторов Киллинга может вообще не оказаться и невозможно будет определить предпочтительного множества мод положительной частоты. В статическом пространстве-времени, кото-

рое имеет времениподобные вектора Киллинга, возможно определить моды с положительной частотой. Но в таких пространствах могут возникать более одного поля времениподобных векторов Киллинга, что делает процедуру квантования в различных координатах (описывающих один и тот же гравитационный фон) неэквивалентной. Отсюда следует [64], что концепция частицы не носит характер общековариантности в искривленном пространстве времени. Возможность обойти эту проблему заключается в попытке интерпретировать фермионы не как одномерные пространственно-временные объекты, а как двумерные протяженные пространственно-временные объекты, или струны [1] - [7]. Таким образом, различные теории струн (а также обобщение этих теорий — М-теория [3], [11]-[12]) в настоящее время являются вероятными кандидатами на роль объединения всех взаимодействий, включая гравитационное. Построение такой теории позволит изучать свойства очень ранней Вселенной при сверхвысоких энергиях.

Существуют феноменологические способы описания процессов при сверхвысоких энергиях. Например, так называемый голографический принцип [65]-[69], используемый как в физике черных дыр, так и в космологии. Применительно к четырехмерному пространству-времени, голографический принцип заключается в следующем: если нужно объединить квантовую механику и гравитацию, можно предположить, что наблюдаемые степени свободы нашей Вселенной являются проекциями с трехмерной пространственно-временной поверхности, на которой "хранится" вся информация, по аналогии с энтропией черной дыры, определяемой площадью трехмерной пространственно-временной поверхности горизонта. Согласно авторам ([69]), из голографического принципа может быть получена и инфляция в космологии, и теория струн.

### 1.1.3 Теория струн

Рассмотрим основные идеи теории струн [1] - [7]. Эффективное репараметризационно-инвариантное (то есть инвариантное относительно произвольной замены переменной) струнное действие в простейшем случае определяется как площадь заметаемой поверхности при движении струны:

$$S = -\frac{1}{2}T \int_0^\pi d\sigma \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha x^\mu \partial_\beta x_\mu,$$

где  $T$  — постоянный размерный множитель, параметры  $\sigma$  и  $\tau$  задают точки на мировом листе,  $x^\mu = x^\mu(\sigma, \tau)$  — координаты Минковского для струны,  $g_{\alpha\beta}$  — метрика на мировом листе.

В настоящее время вместо единой струнной теории существуют пять независимых струнных теорий, а именно: гетеротические струны, основанные на группе  $E_8 \times E_8$ , гетеротические струны, основанные на группе  $SO(32)$ , бозонные струны, суперструны I-ого типа, суперструны II-ого типа, и согласно недавним исследованиям [7], все эти теории связаны преобразованиями T-дуальности. Основные свойства этих преобразований заключаются в том, что, во-первых, элементарная частица одной теории ставится в соответствие составной частице дуальной теории, и, во-вторых, константа связи одной теории обратно пропорциональна константе связи дуальной теории. Дуальность является свойством полной квантовой струнной теории и, таким образом, позволяет построить единую более общую теорию, включающую в себя все струнные теории. Это так называемая M-теория [3], [11]-[12], которая в низкоэнергетическом пределе дает одиннадцатимерную супергравитацию. На настоящий момент этот подход (так называемый непертурбативный) проходит этап формирования (квантово-механические матричные теории [3] и др.).

Теория струн позволяет получить квантовую теорию гравитации без ультрафиолетовых расходимостей, так называемых аномалий (квантовая теория поля имеет аномалию, если некоторая глобальная

или локальная симметрия классического действия не является симметрией квантовой теории, то есть сохраняющийся нетеровский ток соответствует несохраняющейся функции Грина). Следовательно, спектр такой струны содержит безмассовое состояние спина 2, обладающее всеми свойствами гравитона — переносчика гравитационных взаимодействий. Таким образом, гравитация включается в теорию струн естественным образом, как одна из степеней свободы. После сокращения аномалий оказалось возможным получить, что суперсимметричные теории с супергравитацией могут существовать в десятимерном геометрическом пространстве-времени с определенной группой, например,  $SO(32)$  (ортогональная группа вращений размерности  $n=32$  с положительным определителем, равным единице), которая описывает гетеротические струны, то есть струны с сокращающимися аномалиями (на однопетлевом уровне) и обладающие свойствами унитарности, суперсимметрии, лоренц-инвариантности, конечности, а также отсутствием тахионов, что исключает нестабильные вакуумные состояния и влияние на инфракрасные расходимости в петлевых диаграммах. Такую десятимерную теорию можно компактифицировать для использования в четырехмерном пространстве-времени [3].

#### 1.1.4 Обобщенная модель Эйнштейна-Гильберта и роль скалярных полей

После компактификации десятимерного пространства в наблюдаемые четыре измерения, теория струн описывается низкоэнергетическим (энергии много меньше  $10^{19}$  ГэВ) эффективным действием, обобщающим классическое действие Эйнштейна-Гильберта [2]

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ m_{Pl}^2 (-R + 2\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi) + \lambda_2 (e^{-2\phi} S_2) \right. \\ \left. + \lambda_3 (e^{-4\phi} S_3) \right] + \text{дополнительные скалярные поля,}$$

поля Янга-Миллса в сочетании с высшими

$$\begin{aligned}
& \text{поправками по кривизне}], \\
S_2 &= R_{ijkl}R^{ijkl} - 4R_{ij}R^{ij} + R^2, \\
S_3 &= 2R^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta}{}_{\lambda\rho}R^{\lambda\rho}{}_{\mu\nu} - 4R^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}R^{\lambda\beta\rho}R^{\alpha}{}_{\rho\mu\lambda} + \frac{3}{2}RR^2_{\mu\nu\alpha\beta} \\
&+ 12R^{\mu\nu\alpha\beta}R_{\alpha\mu}R_{\beta\nu} + 8R^{\mu\nu}R_{\nu\alpha}R^{\alpha}{}_{\mu} - 12RR^2_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}R^3 \\
&+ R^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta}{}_{\lambda\rho}R^{\lambda\rho}{}_{\mu\nu},
\end{aligned}$$

где трехпетлевая поправка  $S_3$  приведена для бозонной струны. В дополнение к классическому эйнштейновскому члену (скалярной кривизне  $R$ ) это новое действие обычно включает в себя скалярные поля-модули, скалярное дилатонное поле  $\phi$ , поля Янга-Милса и поправки высших порядков по кривизне в различных сочетаниях [51]-[58].

Здесь следует отметить разницу между компактифицированными теориями различных типов. Теория суперструн типа II не содержит квадратичной поправки по кривизне. Как бозонная теория, так и гетеротические теории содержат одинаковую поправку второго порядка и различаются в третьей и более высоких поправках. В дальнейшем рассматриваются только бозонная и гетеротические струны с квадратичной поправкой по кривизне.

Скалярные поля-модули [70] обычны для струнных моделей. Они ассоциируются с нарушением суперсимметрии [71]-[74], а также с размерами пространств высших измерений [70] и представляют собой "след" от компактификации высших размерностей.

Скалярное дилатонное поле входит в фундаментальное струнное действие и при переходе к одиннадцатимерной М-теории компенсируется введением дополнительной пространственно-временной компоненты метрики. В отличие от полей-модулей, дилатонное поле может проявляться и при достаточно низких энергиях.

Как поля-модули, так и дилатонное поле интересны для космологии, так как являются кандидатами в инфлатон [13]-[14], а также могут играть роль в генерации барионной асимметрии [75]-[76]. Следует

отметить, что наиболее классические струнные уравнения движения без дилатонного поля не приводят к инфляции [77]. Множество теорий гравитации с высшими производными и с дилатонным полем производят требуемый инфляционный рост в модели Фридмана-Робертсона-Уокера [78]. Согласно этой модели Вселенная пространственно-однородна и допускает шести-параметрическую группу изометрий с поверхностями транзитивности в виде пространственно-подобных трех-поверхностей постоянной кривизны.

В полученной модели с обобщенным лагранжианом (так называемый пертурбативный подход) струнная теория предсказывает, что уравнения Эйнштейна модифицируются с помощью поправок высших порядков по кривизне в областях, где кривизна приближается к планковским значениям [2]. Важно подчеркнуть различие в пертурбативном и непертурбативном подходах. Пертурбативный подход базируется на классическом лагранжиане ОТО, к которому добавляются поправки, представляющие собой различные сочетания скалярных полей с тензорами Риччи и Римана, в то время как непертурбативный подход основывается на обобщенной М-теории.

## 1.2 Первичные черные дыры

### 1.2.1 Введение

Современная наблюдательная космология не требует введения дополнительных размерностей. Тем не менее, характерные для ранней Вселенной процессы при сверхвысоких энергиях не могут найти адекватного описания в рамках классической ОТО, необходимо привлекать другие, обобщенные теории, способные "работать" на планковских масштабах. Полная суперсимметричная струнная теория, в полной мере использующая математический аппарат абстрактных теорий высших размерностей, пока не имеет экспериментальных подтверждений,

но эта теория способна "работать" на планковских энергиях и после компактификации может описывать четырехмерное пространство-время. Таким образом, перед современной физикой стоит важнейшая задача объединить наблюдательную космологию и абстрактные теории высших размерностей [79], найти, в частности, наблюдательные следствия теории струн.

В данной работе исследуется связь струнной теории с первичными черными дырами, как объектами, предсказанными современной космологией и релятивистской гравитацией.

### **1.2.2 "Классические" черные дыры и первичные черные дыры**

Черная дыра [20] - [21], [80] - [84] — решение уравнений Эйнштейна в ОТО, представляющая собой область пространства-времени, которую из-за мощной силы притяжения не может покинуть даже свет. Граница черной дыры — горизонт событий — делит пространство-время на две принципиально различные области: наблюдатель, принадлежащий внешней области, никогда не увидит событий, происходящих во внутренней области. Черная дыра может быть сформирована путем коллапса "старой" звезды. Источники рентгеновского излучения, которые наблюдались в нашей галактике с 1970-ого года, включают класс нескольких десятков быстропеременных источников, каждый из которых может скрывать черную дыру звездной массы. С большой степенью уверенности предполагается, что в центре нашего Млечного Пути существует массивная черная дыра [85].

Как было отмечено во введении, возможно существование микроскопических ПЧД с массами, меньшими массы Солнца [15] - [18], которые могли сформироваться в результате коллапса нерегулярностей на ранних этапах развития Вселенной, в период инфляции, за счет квантовых флуктуаций плотности.

Условия, при которых ПЧД могли бы образоваться в ранней Вселенной, требуют постоянства потенциала во время инфляционного режима [86]. Механизм переноса энергии инфлатонного поля оказывается тесно связанным с процессом формирования как заряженных, так и незаряженных ПЧД. ПЧД изучались в различных инфляционных моделях: новая хаотическая инфляция, двойная инфляция и др. [87].

Многое из того, что мы знаем о черных дырах, основано на точных решениях теории Эйнштейна, а именно, решении Шварцшильда

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}}dr^2 + r^2(\sin^2\theta d\phi^2 + d\theta^2),$$

описывающего сферически-симметричной пустое пространство-время вне сферически-симметричного массивного тела, решению Рейснера-Нордстрема

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{e^2}{r^2}\right)dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2M}{r} + \frac{e^2}{r^2}}dr^2 + r^2(\sin^2\theta d\phi^2 + d\theta^2),$$

представляющего собой единственное асимптотически-плоское сферически-симметричное решение уравнений Эйнштейна-Максвелла, решению Керра вращающейся незаряженной черной дыры, в координатах Бойера-Линдквиста имеющего вид:

$$ds^2 = -\frac{\rho^2 \Delta}{A}dt^2 + \frac{A \sin^2\theta}{\rho^2}\left(d\phi - \frac{2aMr}{A}dt\right)^2 + \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 + \rho^2 d\theta^2,$$

где  $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2\theta$ ,  $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$ ,  $A = (r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2\theta$  и решении Керра Ньюмена, являющегося наиболее общим стационарным аксиально-симметричным решением уравнений Эйнштейна-Максвелла

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{\rho^2}(dt - a \sin^2\theta d\phi)^2 + \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}(adt - (r^2 + a^2)d\phi)^2 + \rho^2\left(\frac{dr^2}{\Delta} + d\theta^2\right)$$

где  $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2 + P^2$ .

В приведенных решениях соответственно  $M$  — масса,  $a$  — удельный момент,  $Q$  — заряд,  $P$  — магнитный монополярный заряд черной дыры. Сигнатура метрики в приведенных формулах  $\{- + + +\}$



Последнее из этих решений, являющееся наиболее общим, представляет черную дыру, обладающую массой, электрическим зарядом и моментом. Черная дыра ”забывает”, сколько барионов она поглотила, но она всегда обладает тремя вышеназванными параметрами — это так называемая теорема ”об отсутствии волос” для черных дыр [85].

В контексте классической ОТО без учета квантовых эффектов черные дыры могут терять полную массу [20] (процесс Пенроуза для вращающихся или заряженных черных дыр). Однако, за счет квантовых эффектов в гравитационном поле, даже шварцшильдовская незаряженная черная дыра способна излучать частицы, ”испаряться”, согласно теории Хокинга.

С. Хокинг показал, что эта теория на фоне коллапсирующего в черную дыру тела приводит, со временем, к излучению частиц всех мод квантового поля и с характерным тепловым спектром. Это излучение возникает аналогично появлению электрон-позитронных пар в постоянном электрическом поле.

### 1.2.3 Механизм излучения Хокинга

Рассмотрим механизм излучения Хокинга [20], [28]-[31] (Рис.1.1). Физический эффект излучения Хокинга связан с уменьшением массы черной дыры, причем в классическом приближении скорость уменьшения массы обратно пропорциональна квадрату массы черной дыры. Масса, которая превращается в энергию, показывает, что испущенное излучение должно быть независимо от системы отсчета, в которой оно рассматривается [64]. Известно, что концепция частицы в квантовой теории поля не является общековариантной и зависит от выбранных координат, поэтому эффект Хокинга изучался в различных координатных представлениях [34], [88] - [93].

Таким образом, вместо того, чтобы доказывать ковариантность излучения Хокинга во всех системах координат, можно рассмотреть, на-

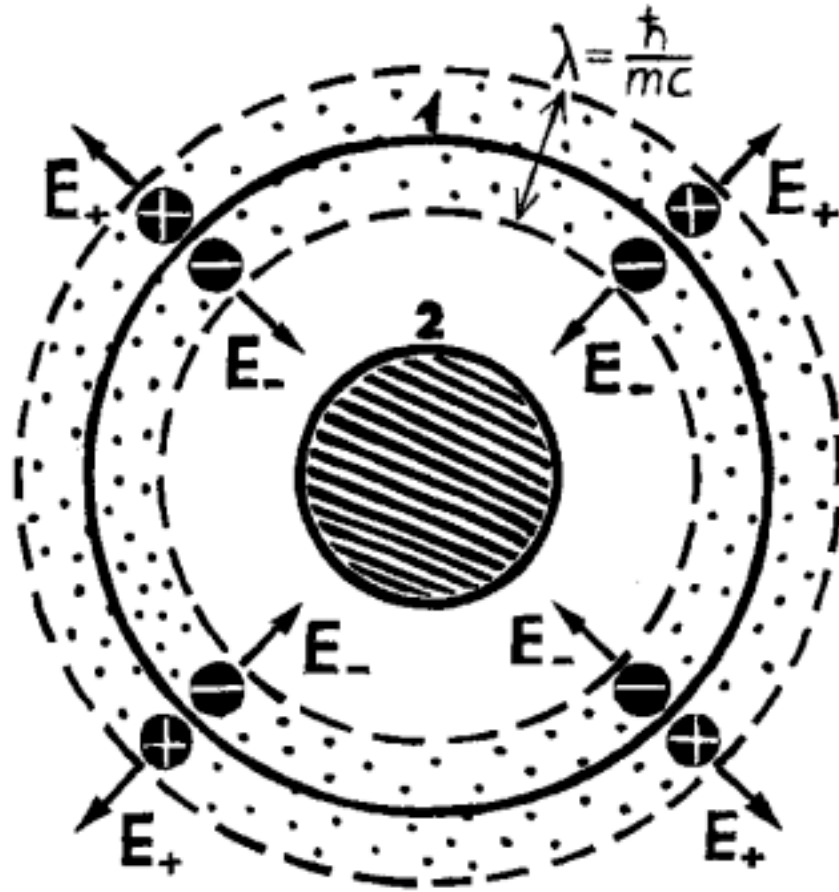


Рис. 1.1: Механизм Хокинга излучения черной дыры. Энергия частицы меняет знак при пересечении горизонта событий таким образом, что пары частиц, возникающих только внутри или только снаружи относительно горизонта, могут материализоваться с нулевой общей энергией. И далее один из членов пары может туннелировать на противоположную сторону. Закон сохранения энергии играет в этом процессе фундаментальную роль: осуществляется переход между состояниями с одной и той же общей энергией. Масса остаточной черной дыры уменьшается в процессе излучения из-за того, что под горизонт проникает частица с отрицательной энергией, а от черной дыры уходит частица с энергией, такой же по величине, но противоположной по знаку. На рисунке цифрой 1 обозначен регулярный горизонт событий черной дыры, цифрой 2 обозначена сферическая детерминантная сингулярность черной дыры, заштрихованная область — неизвестное состояние вещества.

пример, две координатные системы со свойствами, отличающимися от свойств системы Шварцшильда (нестатические и без сингулярности на горизонте событий).

В координатном представлении Леметра:

$$ds^2 = -dT^2 + \frac{dR^2}{\left(\frac{3}{2} \frac{R-T}{2M}\right)^{2/3}} + \left(\frac{3}{2} \frac{R-T}{2M}\right)^{4/3} (2M)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

где  $T$  — собственное время частицы,  $R = \frac{2}{3} 2M \left(\frac{r_i}{2M}\right)^{3/2}$ ,  $r_i$  — лагранжева координата частицы, и в координатном представлении Пайнлеве, которое можно получить из координат Шварцшильда заменой

$$t_{\text{новое}} = t_{\text{старое}} + r \sqrt{\frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2} - \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}}},$$

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + 2\sqrt{\frac{2M}{r}} dr dt + dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2).$$

С помощью метода комплексных путей было показано [64], что спектр возникающих частиц оказывается тепловым и температура такая же, как и стандартная температура Хокинга в шварцшильдовской системе.

Собственный метод, использованный Хокингом, тесно связан со стандартными шварцшильдовскими координатами. Вычисления амплитуд рождения частиц требуют знания волновых мод квантового поля в стандартных шварцшильдовских координатах. Однако решения волновых уравнений в координатной системе не могут быть записаны в терминах простых функций и необходим метод, который не использует волновые моды для вычисления спектра излучения. Как было отмечено во введении, существуют два стандартных приближения излучения Хокинга: геометрия коллапса и погружение в тепловую баню [34], [35]. Для обоих этих приближений необходимо определить процесс излучения как туннелирование, основанное на свойствах частицах в динамической геометрии. Основная идея этого метода следующая (Рис.1.1): энергия частицы меняет знак при пересечении горизонта

событий таким образом, что пары частиц, возникающих только внутри или только снаружи относительно горизонта, могут материализоваться с нулевой общей энергией. И далее один из членов пары может туннелировать на противоположную сторону. Закон сохранения энергии играет в этом процессе фундаментальную роль: осуществляется переход между состояниями с одной и той же общей энергией. Масса остаточной черной дыры уменьшается в процессе излучения из-за того, что под горизонт проникает частица с отрицательной энергией, а от черной дыры уходит частица с энергией, такой же по величине, но противоположной по знаку. Положительная энергия испускаемого излучения должна уравниваться потоком частиц с отрицательной энергией, направленным в черную дыру. Поток отрицательной энергии уменьшает массу черной дыры, и, кроме того, чем меньше масса черной дыры, тем выше ее температура. Скорость потери массы в классической модели испарения Хокинга определяется как:

$$-\frac{dM}{dt} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dE \frac{\Gamma_s(M * E) E}{e^{8\pi M E} - (-1)^{2s}},$$

где  $\Gamma_s(M * E)$  — функция Старобинского-Пейджа [29]-[31], [94]-[95], зависящая от массы (M) и энергии (E) излученной частицы, а также от ее спина  $s$ .

Когда черная дыра теряет массу, ее температура и скорость излучения возрастают, и потеря массы идет еще быстрее. Таким образом, процесс излучения, а так же и другие квантовые эффекты, должны быть наиболее существенными именно для дыр малой массы, то есть, для ПЧД.

Одной из самых загадочных проблем современной теоретической физики является вопрос о конечной стадии хокинговского испарения ПЧД.

#### 1.2.4 Проблема "голой сингулярности" и нарушение квантовой когерентности

В соответствии со стандартным сценарием и формулой Хокинга [20] черные дыры должны испаряться полностью. В то же время ряд моделей [43] - [50] предсказывает наличие нижнего предела на возможную массу черной дыры.

Различные способы остановки испарения в гравитации Лавлока рассматривались в работах [96] - [97], с использованием струно-подобных рядов по кривизне и возможным космологическим следствиям этого факта — в работе [98]. Способ остановки испарения в пертурбативном подходе в струнной гравитации рассматривался в работах [59] - [60].

Если черная дыра испаряется полностью, то во Вселенной может существовать так называемая "голая сингулярность", лишенная горизонта событий и, следовательно, видимая для внешнего наблюдателя. В рамках классической ОТО существование такой сингулярности запрещает гипотеза космической цензуры. Однако, согласно недавним исследованиям [99], ни одно из естественных физических условий (энергетические условия и др.) неспособно реально гарантировать обоснование гипотезы космической цензуры. Во время гравитационного коллапса эффекты внутри сжимающегося вещества задерживают формирование ловушечных поверхностей и видимого горизонта. Этот процесс как бы "выставляет" сингулярность внешнему наблюдателю [99]. Таким образом, как черная дыра, так и "голая сингулярность" являются естественными следствиями классического гравитационного коллапса. Вопрос заключается в том, что образуется раньше: сингулярность или ловушечная поверхность? Становится очевидным, что устойчивость горизонта событий необходимо рассматривать как квантовый феномен. Например, была рассмотрена возможность, что "голая сингулярность" скрыта от внешнего наблюдателя за счет квантовых флуктуаций [20].

Так как законченного описания квантовых микросостояний черной дыры пока не создано, эта проблема сейчас очень широко обсуждается, потому что в рамках квантовой теории одно из вероятных следствий полного испарения черной дыры — нарушение квантовой когерентности.

Рассмотрим одно из возможных объяснений проблемы квантовой когерентности. Представим себе коллапс звезды, находившейся в чистом состоянии. Тогда и результирующая черная дыра будет в чистом состоянии, описывающем ее микросостояния. По законам квантовой механики, фазовые переходы черной дыры могут быть только унитарными, то есть чистое состояние таким и останется. С другой стороны, испарение согласно механизму Хокинга ведет к полному испарению, то есть к уничтожению этого чистого состояния. Результатом этого процесса будет излучение, не зависящее от начальной конфигурации черной дыры, потому что это излучение зависит от внешней геометрии дыры, а информация содержится под горизонтом. Таким образом, финальное состояние — смешанное. Нарушение унитарности во временной эволюции называется информационным парадоксом, потому что вся информация (кроме массы), заключавшаяся в черной дыре, теряется. Одно из возможных решений (указанное С.Хокингом) — модификация некоторых законов квантовой механики.

С другой стороны не исключена возможность, что черная дыра испаряется не полностью, а лишь до некоторого реликтового остатка (реликта).

### **1.2.5 Ограничение на массу черной дыры в струнной гравитации**

Как было сказано выше, в пертурбативном приближении струнная теория предсказывает, что уравнения Эйнштейна модифицируются с помощью поправок высших порядков по кривизне в областях, где кри-

визна приближается к планковским значениям.

Новые типы решений в космологии и в физике черных дыр в рамках струнной гравитации были исследованы во многих работах. Гарфинкл и др. [51] представили точное решение статической заряженной черной дыры в компактифицированном четырехмерном пространстве-времени, рассматривая только поле Максвелла и дилатонное скалярное поле без учета поправок по кривизне. Далее, Миньями и др. [52] исследовали заряженную черную дыру, учитывая в эффективном действии и поле Максвелла, и поправку по кривизне второго порядка. Было получено аналитическое решение методом последовательных приближений решения во всей области его существования. Следует отметить, что этот метод имеет ряд недостатков, а именно: вблизи горизонта черной дыры метод дает плохую точность, и, кроме того, метод не позволяет получить новых эффектов. Канти и др. получили численный результат, описывающий нейтральную [53] (а позже, и заряженную [54]) черную дыру без всяких ограничений на пертурбационные параметры. Алексеев и др., рассматривали действие, содержащее дилатон, гравитон и вторую поправку по кривизне, а также впервые исследовали внутреннюю структуру черной дыры [43]. Тори и др. изучили общий случай черных дыр с членом Гаусса-Боннэ и с различными типами зарядов [55].

Один из наиболее важных результатов струнной гравитации — это ограничение снизу на минимальную массу черной дыры, которое отсутствует в классической ОТО и существует вне зависимости от параметризации метрики в рамках модели с четырехмерным эффективным действием, содержащим гравитон, дилатон и высшие поправки по кривизне. Это ограничение появляется за счет наличия в решении дополнительной особой точки — сферической детерминантной сингулярности.

В планковских единицах ограничение на массу имеет вид:

$$r_{h_{min}} = \sqrt{\lambda} \sqrt{4\sqrt{6}} \phi_h(\phi_\infty),$$

где  $\phi_h(\phi_\infty) > 1$  — значение дилатона на горизонте, зависящее от значения дилатона на бесконечности, являющегося дополнительным внешним параметром модели.

В модели, которая из возможных скалярных полей учитывает в лагранжиане только дилатонное скалярное  $\phi$  поле, а из всего ряда по кривизне только квадратичную поправку (член Гаусса-Боннэ)

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ m_{Pl}^2 \left( -R + 2\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \right) + \lambda e^{-2\phi} (R_{ijkl} R^{ijkl} - 4R_{ij} R^{ij} + R^2) \right], \quad (1.1)$$

минимальная масса черной дыры равна по порядку величины массе Планка (в зависимости от величины константы связи струнной теории).

Следует отметить, что ряд, вводимый в действие, не является просто полиномом общего вида по кривизне, это ряд специального вида. Так, согласно пертурбативному приближению бозонной и гетеротических теорий струн, наиболее естественный выбор поправки второго порядка по кривизне — это четырехмерный инвариант кривизны, так называемый член Гаусса-Боннэ:  $S_{GB} = R_{ijkl} R^{ijkl} - 4R_{ij} R^{ij} + R^2$  [4].

Однако, в четырехмерном действии невозможно ввести просто  $S_{GB}$ , без всяких сомножителей, потому что эта двухпетлевая поправка является полной производной, и, следовательно, вообще не входит в полевые уравнения. Для того, чтобы этого избежать, можно связать член Гаусса-Боннэ с неким скалярным полем  $\phi$ . Таким образом, может быть построено четырехмерное действие с поправкой по кривизне второго порядка, имеющее следующий вид:

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ m_{Pl}^2 \left( -R + 2\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \right) + \lambda \xi(\phi) S_{GB} + \dots \right].$$



Тем же образом, как это сделано в космологии, нельзя ввести наиболее простое обобщение теории (единственное дополнительное скалярное поле), так как, пока мы рассматриваем только сферически-симметричные решения, необходимо принимать во внимание теорему ”об отсутствии волос” [81]. Трактую  $\phi$  как скалярное дилатонное поле, функцию связности  $\xi(\phi)$  фиксируем по правилу теории струн в виде:  $\exp(-2\phi)$  [51], [100]-[103], что приводит к окончательному виду действия:

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ m_{Pl}^2 (-R + 2\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi) + \lambda e^{-2\phi} S_{GB} + \dots \right]. \quad (1.2)$$

Если для случая компактификации бозонной струны рассмотреть ряд по кривизне уже до третьего порядка включительно [57]-[58]

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ m_{Pl}^2 (-R + 2\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi) + \lambda_2 (e^{-2\phi} S_2) \right. \\ &\quad \left. + \lambda_3 (e^{-4\phi} S_3) \right], \\ S_2 &= R_{ijkl} R^{ijkl} - 4R_{ij} R^{ij} + R^2, \\ S_3 &= 2R^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta}{}_{\lambda\rho} R^{\lambda\rho}{}_{\mu\nu} - 4R^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} R_\nu{}^{\lambda\beta\rho} R^\alpha{}_{\rho\mu\lambda} + \frac{3}{2} R R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 \\ &\quad + 12R^{\mu\nu\alpha\beta} R_{\alpha\mu} R_{\beta\nu} + 8R^{\mu\nu} R_{\nu\alpha} R^\alpha{}_\mu - 12R R_{\alpha\beta}^2 + \frac{1}{2} R^3 \\ &\quad + R^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta}{}_{\lambda\rho} R^{\lambda\rho}{}_{\mu\nu}, \end{aligned}$$

то оказывается, что наличие минимальной массы не является эффектом только члена Гаусса-Боннэ, ограничение на массу остается, и размер горизонта несколько увеличится, что было показано как численными расчетами [44], так и анализом топологии пространства-времени вблизи горизонта событий с использованием асимптотических разложений метрических функций [61].

Также было показано, что поправки по кривизне более высокого порядка в силу специфики ряда не дают высших производных в уравнениях поля, следовательно, ограничение на массу сохраняется для всего ряда поправок [45].

И далее, в более общей модели с полями-модулями [104],

$$\begin{aligned}
 S = & \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ m_{Pl}^2 \left( -R + 2\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + 2\partial_\mu \psi \partial^\mu \psi \right) + \left( \lambda_\phi e^{-2\phi} \right. \right. \\
 & \left. \left. + \lambda_\psi \xi(\psi) \right) \left( R_{ijkl} R^{ijkl} - 4R_{ij} R^{ij} + R^2 \right) \right. \\
 & \left. + \text{высшие поправки по кривизне} \right]
 \end{aligned}$$

минимальная масса продолжает увеличиваться и становится уже порядка 10 — 100 планковских масс [45]. Для настоящих исследований можно заметить, что, когда рассматривается вклад от полей-модулей, ”голая сингулярность” может появиться только если размер дополнительных измерений больше, чем размер черной дыры. Если дополнительные измерения оказались бы некомпактными [105], то минимальная черная дыра была бы гораздо больше. В более полных моделях минимальная масса ПЧД переходит в область полуклассического приближения, ”уходит” от ”опасной” планковской области, вблизи которой невозможно было бы с определенностью говорить о существовании (в классическом смысле) самого остатка из-за становящихся доминирующими квантовых флуктуаций пространства-времени.

Таким образом, ограничение на массу черной дыры действительно есть фундаментальный результат теории струн.

Изучение точных решений или, по крайней мере, численное моделирование в модели (1.2) с метрикой, зависящей от двух параметров: радиальной координаты и времени, является задачей очень сложной. Тем не менее, можно получить общие свойства изменения со временем этих решений, изучая устойчивость относительно малых временных возмущений регулярного горизонта событий [62]-[63] и окрестности сферической детерминантной сингулярности [106].

### 1.2.6 Устойчивость регулярного горизонта событий черной дыры

Известно, что в случае заряженной черной дыры (решение типа "черная дыра", полученное из обобщенного действия Эйнштейна-Гильберта, содержащего поля Янга-Миллса), этот объект обязан своему существованию балансу между силой гравитационного притяжения и янг-миллсовскими силами отталкивания. В случае полей Янга-Миллса структура этих решений эквивалентна решению со сфалеронами [107] в плоских янг-миллсовских теориях и потому эти решения неустойчивы. Но в то же время дилатонные черные дыры всецело зависят от единственной силы — гравитационной, что позволяет предполагать устойчивость таких структур.

Канти и др. [62] представили аналитические, а так же и численные результаты, действительно подтверждающие линейную устойчивость горизонта событий дилатонной черной дыры относительно линейных, зависящих от времени возмущений классических решений (решений, зависящих только от одного радиального параметра). Метод, который они использовали, оказался очень простым и наглядным. Они смогли свести систему гравитационно-дилатонных уравнений для сферически-симметричных решений к одномерной задаче Шредингера, в которой неустойчивости эквивалентны граничным состояниям (или отрицательным собственным значениям и мнимым частотам функционала энергии), и показали, что в этой гравитационно-дилатонной системе могут существовать неограниченные состояния. Было показано, что черные дыры со скалярным дилатонным полем устойчивы относительно линейных временных возмущений уравнений.

Устойчивость горизонта событий была также доказана в работах Тори и др. [63]. Использовалась теория катастроф (ТК) и сравнивалась с результатами анализа линейных возмущений. Было показано, что метод ТК применим для анализа устойчивости неабелевых чер-

ных дыр различных типов. В этих работах была сделана попытка исследовать устойчивость сферической детерминантной сингулярности с помощью продолжения асимптотических разложений метрических функций под горизонт. Такой подход не позволяет сделать однозначного вывода об устойчивости, так как топология пространства вблизи регулярного горизонта и сферической сингулярности различна [43].

### 1.3 Математическая постановка задачи диссертации

Разработать модель первичных черных дыр (ПЧД) в рамках решения типа "черная дыра" в четырехмерной струнной гравитации, а именно:

1. В обобщенной модели Эйнштейна-Гильберта с двухпетлевой поправкой по кривизне (член Гаусса-Бонне) и нестационарным дилатонным скалярным полем  $\phi = \phi(r, t)$

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ m_{Pl}^2 \left( -R + 2\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \right) + \lambda e^{-2\phi} \left( R_{ijkl} R^{ijkl} - 4R_{ij} R^{ij} + R^2 \right) \right]$$

для нестационарной асимптотически-плоской, сферически-симметричной метрики вида:

$$ds^2 = \Delta dt^2 - \frac{\sigma^2}{\Delta} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\psi^2),$$

где  $\Delta = \Delta(r, t)$ ,  $\sigma = \sigma(r, t)$  — метрические функции, зависящие от радиальной координаты и времени, исследовать устойчивость сферической детерминантной сингулярности черной дыры относительно малых временных возмущений с помощью асимптотических разложений метрических функций и дилатонного скалярного поля в окрестности исследуемой особой точки  $r = r_s$ :

$$\Delta(r) = \Delta_0 + \Delta_1(r - r_s) + \Delta_2(r - r_s)^{3/2} + \dots,$$

$$\begin{aligned}\sigma(r) &= \sigma_0 + \sigma_1 \sqrt{r - r_s} + \dots, \\ \phi(r) &= \phi_0 + \phi_1(r - r_s) + \phi_2(r - r_s)^{3/2} + \dots\end{aligned}$$

Получить общий вывод об устойчивости относительно малых временных возмущений во всех особых точках и об эволюции во времени реликтового остатка черной дыры;

2. найти условие на величину температуры разогрева (reheating) постинфляционной Вселенной, при которой к современному моменту времени процесс "испарения" ПЧД завершился, и уже образовались реликтовые остатки этих объектов;
3. в рамках стационарной модели

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ m_{Pl}^2 \left( -R + 2\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \right) + \lambda e^{-2\phi} \left( R_{ijkl} R^{ijkl} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 4R_{ij} R^{ij} + R^2 \right) \right]\end{aligned}$$

для стационарной асимптотически-плоской, сферически-симметричной метрики:

$$ds^2 = \Delta(r) dt^2 - \frac{\sigma(r)^2}{\Delta(r)} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\psi^2)$$

- (a) в приближении Вентцеля-Крамера-Бриллюен с помощью метода туннелирования построить и проанализировать модель испарения ПЧД, основанную на аналитических и численных решениях полевых уравнений;
- (b) исследовать возможность прямых экспериментальных поисков продуктов излучения реликтовых остатков ПЧД и рассмотреть реликтовые остатки ПЧД как кандидатов в темную материю в нашей Вселенной.

## Глава 2

# Устойчивость дилатонных черных дыр Гаусса-Боннэ относительно малых временных возмущений.

### 2.1 Введение

В этой главе исследуется устойчивость черной дыры в обобщенной четырехмерной модели Эйнштейна-Гильберта с высшими поправками по кривизне и скалярным дилатонным полем вблизи сферической детерминантной сингулярности. Исследование устойчивости линеаризованной автономной системы полевых уравнений в рамках заданной точности при разложении метрических функций в окрестности исследуемой особой точки потребовало дополнительных исследований. Оказалось возможным свести задачу об устойчивости к одномерной задаче Шредингера относительно вариаций полевых уравнений без построения функции Ляпунова. Было доказано, что малые возмущения не увеличиваются со временем на некотором временном интервале. Таким образом, решение дилатонной черной дыры устойчиво вблизи сферической детерминантной сингулярности (СДС).

## 2.2 Описание модели

Для исследования устойчивости дилатонной черной дыры относительно малых временных возмущений вблизи СДС (обозначим  $r_s$ ), используется следующая модель:

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ m_{Pl}^2 \left( -R + 2\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \right) + \lambda e^{-2\phi} (R_{ijkl} R^{ijkl} - 4R_{ij} R^{ij} + R^2) \right], \quad (2.1)$$

где  $m_{Pl}$  — масса Планка,  $\lambda$  — струнная константа связи,  $\phi = \phi(r, t)$  — скалярное дилатонное поле, зависящее от радиальной координаты и времени.

Нестационарная асимптотически-плоская, сферически-симметричная метрика берется в виде:

$$ds^2 = \Delta dt^2 - \frac{\sigma^2}{\Delta} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\psi^2), \quad (2.2)$$

где  $\Delta = \Delta(r, t)$ ,  $\sigma = \sigma(r, t)$  — метрические функции, зависящие от радиальной координаты и времени.

Варьируя действие (2.1), получаем полевые уравнения:

$$\begin{aligned} 0 &= 2e^{2\phi} r^2 \phi'^2 \sigma^3 \Delta^2 - 8\phi'' \sigma^3 \Delta^2 - 2e^{2\phi} r \sigma' \sigma^2 \Delta^2 + 16\phi'^2 \sigma^3 \Delta^2 \\ &+ 8\phi' \sigma' \sigma^2 \Delta^2 + 2\sigma^5 e^{2\phi} r^2 \dot{\phi}^2 + 8\dot{\phi} \dot{\sigma} \sigma^4 - 8\dot{\phi} \dot{\sigma} \sigma^2 \Delta \\ &- 16\dot{\phi}^2 \sigma^3 \Delta + 16\sigma^5 \dot{\phi}^2 - 8\sigma^5 \ddot{\phi} + 8\ddot{\phi} \sigma^3 \Delta - 16\Delta^3 \phi'^2 \sigma \\ &- 24\Delta^3 \phi' \sigma' + 8\Delta^3 \phi'' \sigma, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} 0 &= -2e^{2\phi} \sigma^4 \Delta^2 + 2e^{2\phi} r \Delta' \sigma^2 \Delta^2 - 2\Delta^3 e^{2\phi} r^2 \phi'^2 \sigma^2 \\ &+ 24\Delta^3 \phi' \Delta' + 8\dot{\phi} \dot{\Delta} \sigma^2 \Delta - 8\phi' \Delta' \sigma^2 \Delta^2 + 2\Delta^3 e^{2\phi} \sigma^2 \\ &- 16\ddot{\phi} \sigma \Delta^2 + 32\dot{\phi}^2 \sigma^2 \Delta^2 - 32\dot{\phi}^2 \sigma^4 \Delta + 16\ddot{\phi} \sigma^4 \Delta \\ &- 8\dot{\phi} \dot{\Delta} \sigma^4 - 2e^{2\phi} r^2 \dot{\phi}^2 \sigma^4 \Delta, \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} 0 &= -8\dot{\Delta}^2 \sigma^3 \Delta - 8\Delta'' \sigma^3 \Delta^3 - 16\ddot{\sigma} \sigma^2 \Delta^3 - 8\dot{\Delta} \dot{\sigma} \sigma^2 \Delta^2 \\ &+ 4\sigma^5 e^{2\phi} r^2 \ddot{\phi} \Delta^2 + 8\Delta^4 \Delta'' \sigma - 8\Delta^4 e^{2\phi} r \phi' \sigma^3 - 24\Delta^4 \Delta' \sigma' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 8 \Delta' \sigma' \sigma^2 \Delta^3 + 32 \dot{\sigma}^2 \sigma \Delta^3 + 8 \ddot{\Delta} \sigma^3 \Delta^2 + 8 \Delta'^2 \sigma \Delta^3 \\
& - 8 \sigma^5 \ddot{\Delta} \Delta + 16 \sigma^5 \dot{\Delta}^2 - 24 \dot{\Delta} \dot{\sigma} \sigma^4 \Delta + 16 \ddot{\sigma} \sigma^4 \Delta^2 \\
& - 4 \Delta^4 e^{2\phi} r^2 \phi'' \sigma^3 - 4 e^{2\phi} \Delta' r^2 \phi' \sigma^3 \Delta^3 + 4 \Delta^4 e^{2\phi} r^2 \phi' \sigma' \sigma^2 \\
& + 4 e^{2\phi} \dot{\sigma} r^2 \dot{\phi} \sigma^4 \Delta^2 - 4 \sigma^5 e^{2\phi} r^2 \dot{\phi} \dot{\Delta} \Delta, \tag{2.5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = & 2 e^{2\phi} r \Delta'' \Delta^3 \sigma^3 + 128 \dot{\phi} \dot{\sigma} \phi' \Delta^3 \sigma^2 + 16 \phi' \ddot{\Delta} \Delta^2 \sigma^3 \\
& - 32 \Delta^4 \phi'^2 \Delta' \sigma + 32 \dot{\phi}^2 \Delta' \Delta^2 \sigma^3 + 32 \dot{\phi}' \dot{\Delta} \Delta^2 \sigma^3 \\
& + 16 \dot{\phi} \Delta' \dot{\sigma} \Delta^2 \sigma^2 - 64 \dot{\phi} \dot{\Delta} \phi' \Delta^2 \sigma^3 + 16 \Delta^4 \phi' \Delta'' \sigma \\
& - 16 \ddot{\phi} \Delta' \Delta^2 \sigma^3 - 16 \phi' \dot{\Delta}^2 \Delta \sigma^3 - 2 e^{2\phi} r \Delta' \sigma' \Delta^3 \sigma^2 \\
& - 4 \sigma^5 e^{2\phi} r \dot{\Delta}^2 - 4 e^{2\phi} r \ddot{\sigma} \Delta^2 \sigma^4 - 48 \Delta^4 \phi' \Delta' \sigma' \\
& + 32 \ddot{\phi} \sigma' \Delta^3 \sigma^2 + 16 \Delta^4 \phi'' \Delta' \sigma - 16 \dot{\phi} \dot{\Delta} \sigma' \Delta^2 \sigma^2 \\
& - 4 \sigma^5 e^{2\phi} r \dot{\phi}^2 \Delta^2 + 64 \phi' \dot{\sigma}^2 \Delta^3 \sigma + 4 e^{2\phi} \Delta' \Delta^3 \sigma^3 \\
& - 64 \dot{\phi}^2 \sigma' \Delta^3 \sigma^2 - 64 \dot{\phi}' \dot{\sigma} \Delta^3 \sigma^2 + 16 \Delta'^2 \phi' \Delta^3 \sigma \\
& - 32 \phi' \ddot{\sigma} \Delta^3 \sigma^2 - 16 \phi' \dot{\Delta} \dot{\sigma} \Delta^2 \sigma^2 + 6 e^{2\phi} \dot{\sigma} r \Delta' \Delta \sigma^4 \\
& + 2 \sigma^5 e^{2\phi} r \ddot{\Delta} \Delta - 4 \Delta^4 e^{2\phi} \sigma' \sigma^2 + 4 \Delta^4 e^{2\phi} r \phi'^2 \sigma^3, \tag{2.6}
\end{aligned}$$

Уравнение (2.4) является линейно зависимым от уравнений (2.3), (2.5) и (2.6).

### 2.3 Асимптотическое поведение метрических функций вблизи сферической детерминантной сингулярности

В отличие от координатной сингулярности, имеющей место на горизонте событий черной дыры в координатах Шварцшильда, СДС является физической сингулярностью, то есть не существует однозначного дифференцируемого координатного преобразования, делающего метрику гладкой при  $r = r_s$ . Таким образом, тензор кривизны в указанной точке расходится, и задача исследования устойчивости непосредственно в СДС является некорректной. Однако можно построить аналити-



ческие асимптотические разложения параметров метрики с некоторой заданной точностью и исследовать устойчивость малой окрестности указанной особой точки. Такой подход допустим, так как если топология пространства-времени в малой окрестности СДС не будет сильно меняться при малых временных возмущениях, то и сама сингулярность ”не исчезнет” при этих возмущениях в силу гладкости асимптотических разложений.

Для выявления топологической конфигурации вблизи СДС  $r \approx r_s$  в (2.1)-(2.2) полагаем стационарными  $\Delta = \Delta(r)$ ,  $\sigma = \sigma(r)$  и  $\phi = \phi(r)$ . Асимптотическое поведение метрических функций и дилатона имеет вид [45]:

$$\Delta(r) = \delta_0 + \frac{\phi_2 (r - r_s)}{\theta} + \delta_3 (r - r_s)^{3/2} + o((r - r_s)^2), \quad (2.7)$$

$$\sigma(r) = \sigma_0 + \sigma_2 \sqrt{r - r_s} + o((r - r_s)^{3/2}), \quad (2.8)$$

$$\phi(r) = \phi_0 + \phi_2 (r - r_s) + \phi_3 (r - r_s)^{3/2} + o((r - r_s)^2). \quad (2.9)$$

Подставляя выражения (2.7)-(2.9) в полевые уравнения, находим вид параметров  $\delta_0, \theta, \delta_3, \sigma_0, \sigma_2, \phi_0, \phi_2, \phi_3, r_s$ :

$$\phi_0 = \frac{3}{4} \ln(2) - \frac{1}{2} \ln(-\eta) + \ln(1 - \eta) - \ln(r_s),$$

$$\phi_2 = \frac{1}{2} \frac{(\eta - 1) \sqrt{2}}{\eta r_s},$$

$$\phi_3 = -\frac{1}{96 r_s \eta^4} \sigma_2 (\eta - 1)^2 \sqrt{2} (-8 \eta + 8 \eta^3 - 20 \eta^2 + 4 \eta^4 - 4 \cdot 2^{3/4} \eta^2 + 3 \cdot 2^{3/4} \eta^4 + 2^{3/4}),$$

$$\sigma_0 = 4 \frac{\eta}{1 - \eta^2},$$

$$\delta_0 = -16 \frac{\eta^2}{(1 - \eta^2)^2},$$

$$\delta_3 = -\frac{16}{3} \frac{\sigma_2 (\eta - 1)}{r_s (1 + \eta)^2}$$

и параметр

$$\theta = \frac{1}{32} \frac{\sqrt{2} (1 - \eta^2)^2}{\eta^2}.$$

Свободные параметры –  $\eta$ ,  $\sigma_2$  и  $r_s$ . Полученные три свободных параметра могут быть сведены к стандартным свободным параметрам модели, а именно: масса черной дыры, дилатонный заряд и значение дилатона на бесконечности.

## 2.4 Исследование устойчивости положений равновесия автономной системы

Приведя систему уравнений второго порядка по переменной времени (2.3), (2.5), (2.6) к системе первого порядка с помощью стандартного способа замены вторых производных новыми переменными, заметим, что полученная система является автономной:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\Delta} = \alpha \\ \dot{\sigma} = \beta \\ \dot{\phi} = \gamma \\ \dot{\alpha} + \Lambda \dot{\beta} = G \\ \dot{\gamma} = F, \end{array} \right. \quad (2.10)$$

где  $\alpha, \beta, \gamma$  есть дополнительные переменные,  $\Lambda = -2\Delta/\sigma$ , а  $G, F$  не зависят от времени явно и являются функциями  $r, \Delta, \Delta', \Delta'', \sigma, \sigma', \phi, \phi', \phi'', \alpha, \beta, \gamma$ , а именно:

$$\begin{aligned} F = & -\frac{1}{2} \frac{\sigma^2 e^{2\phi} r^2 \gamma^2}{(\Delta - \sigma^2)} - 2 \frac{\sigma^2 \gamma^2}{(\Delta - \sigma^2)} - 3 \frac{\sigma \gamma \beta}{(\Delta - \sigma^2)} - 3 \frac{\phi' \sigma' \Delta^2}{\sigma (\Delta - \sigma^2)} \\ & + 2 \frac{\gamma^2 \Delta}{(\Delta - \sigma^2)} + 6 \frac{\Delta^3 \phi'^2}{\sigma^2 (\Delta - \sigma^2)} - \frac{1}{2} \frac{e^{2\phi} r^2 \phi'^2 \Delta^2}{(\Delta - \sigma^2)} + 9 \frac{\Delta^3 \phi' \sigma'}{\sigma^3 (\Delta - \sigma^2)} \\ & - 6 \frac{\phi'^2 \Delta^2}{(\Delta - \sigma^2)} + 3 \frac{\gamma \beta \Delta}{\sigma (\Delta - \sigma^2)} + \frac{3}{4} \frac{e^{2\phi} r \sigma' \Delta^2}{\sigma (\Delta - \sigma^2)} - \frac{1}{4} \frac{\Delta \sigma^2 e^{2\phi}}{(\Delta - \sigma^2)} \\ & - \frac{\gamma \alpha}{(\Delta - \sigma^2)} + \frac{\Delta \phi' \Delta'}{(\Delta - \sigma^2)} + \frac{\sigma^2 \gamma \alpha}{\Delta (\Delta - \sigma^2)} - \frac{1}{4} \frac{\Delta e^{2\phi} r \Delta'}{(\Delta - \sigma^2)} \\ & - 3 \frac{\Delta^2 \phi' \Delta'}{\sigma^2 (\Delta - \sigma^2)} - \frac{1}{4} \frac{\Delta^2 e^{2\phi}}{(\Delta - \sigma^2)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G = & -3 \frac{\sigma^5 r^2 e^{2\phi} \Delta^4 \phi'^2}{(\Delta^2 \sigma^3 - \sigma^5 \Delta)(\sigma^2 - \Delta)} + \frac{\alpha^2 \sigma^3 \Delta}{(\Delta^2 \sigma^3 - \sigma^5 \Delta)} \\
& - \frac{\sigma^5 r^3 e^{4\phi} \Delta^3 \Delta'}{(8 \Delta^2 \sigma^3 - 8 \sigma^5 \Delta)(\sigma^2 - \Delta)} + 3 \frac{\sigma^4 r^3 e^{4\phi} \Delta^4 \sigma'}{(8 \Delta^2 \sigma^3 - 8 \sigma^5 \Delta)(\sigma^2 - \Delta)} \\
& + \frac{\sigma^5 r^2 e^{2\phi} \Delta^3 \gamma^2}{(\Delta^2 \sigma^3 - \sigma^5 \Delta)(\sigma^2 - \Delta)} - \frac{\beta r^2 \gamma \sigma^4 e^{2\phi} \Delta^2}{(2 \Delta^2 \sigma^3 - 2 \sigma^5 \Delta)} \\
& - \frac{\sigma^5 r^4 e^{4\phi} \Delta^4 \phi'^2}{(4 \Delta^2 \sigma^3 - 4 \sigma^5 \Delta)(\sigma^2 - \Delta)} - \frac{\sigma^7 r^2 e^{2\phi} \Delta^2 \gamma^2}{(\Delta^2 \sigma^3 - \sigma^5 \Delta)(\sigma^2 - \Delta)} \\
& - 2 \frac{\sigma^5 \alpha^2}{(\Delta^2 \sigma^3 - \sigma^5 \Delta)} + 3 \frac{\Delta^4 \Delta' \sigma'}{(\Delta^2 \sigma^3 - \sigma^5 \Delta)} - \frac{\Delta^4 \Delta'' \sigma}{(\Delta^2 \sigma^3 - \sigma^5 \Delta)} \\
& - \frac{\Delta'^2 \sigma \Delta^3}{(\Delta^2 \sigma^3 - \sigma^5 \Delta)} + \frac{\sigma^7 r^2 e^{4\phi} \Delta^3}{(8 \Delta^2 \sigma^3 - 8 \sigma^5 \Delta)(\sigma^2 - \Delta)} + \frac{\Delta^4 r \phi' \sigma^3 e^{2\phi}}{(\Delta^2 \sigma^3 - \sigma^5 \Delta)} \\
& + \frac{\alpha \beta \sigma^2 \Delta^2}{(\Delta^2 \sigma^3 - \sigma^5 \Delta)} - \frac{\Delta' \sigma' \sigma^2 \Delta^3}{(\Delta^2 \sigma^3 - \sigma^5 \Delta)} - 4 \frac{\beta^2 \sigma \Delta^3}{(\Delta^2 \sigma^3 - \sigma^5 \Delta)} \\
& + 3 \frac{\alpha \beta \sigma^4 \Delta}{(\Delta^2 \sigma^3 - \sigma^5 \Delta)} + \frac{\Delta'' \sigma^3 \Delta^3}{(\Delta^2 \sigma^3 - \sigma^5 \Delta)} + \frac{\Delta^4 r^2 \phi'' \sigma^3 e^{2\phi}}{(2 \Delta^2 \sigma^3 - 2 \sigma^5 \Delta)} \\
& + 9 \frac{\sigma^2 r^2 e^{2\phi} \Delta^5 \phi' \sigma'}{(2 \Delta^2 \sigma^3 - 2 \sigma^5 \Delta)(\sigma^2 - \Delta)} - 3 \frac{\sigma^4 r^2 e^{2\phi} \Delta^4 \phi' \sigma'}{(2 \Delta^2 \sigma^3 - 2 \sigma^5 \Delta)(\sigma^2 - \Delta)} \\
& + 3 \frac{\sigma^4 r^2 e^{2\phi} \Delta^3 \gamma \beta}{(2 \Delta^2 \sigma^3 - 2 \sigma^5 \Delta)(\sigma^2 - \Delta)} - \frac{\sigma^5 r^2 e^{4\phi} \Delta^4}{(8 \Delta^2 \sigma^3 - 8 \sigma^5 \Delta)(\sigma^2 - \Delta)} \\
& - 3 \frac{\sigma^3 r^2 e^{2\phi} \Delta^4 \phi' \Delta'}{(2 \Delta^2 \sigma^3 - 2 \sigma^5 \Delta)(\sigma^2 - \Delta)} + \frac{\sigma^5 r^2 \gamma \alpha e^{2\phi} \Delta}{(2 \Delta^2 \sigma^3 - 2 \sigma^5 \Delta)} \\
& - 3 \frac{\sigma^6 r^2 e^{2\phi} \Delta^2 \gamma \beta}{(2 \Delta^2 \sigma^3 - 2 \sigma^5 \Delta)(\sigma^2 - \Delta)} - \frac{\sigma^5 r^2 e^{2\phi} \Delta^2 \gamma \alpha}{(2 \Delta^2 \sigma^3 - 2 \sigma^5 \Delta)(\sigma^2 - \Delta)} \\
& + \frac{\sigma^5 r^2 e^{2\phi} \Delta^3 \phi' \Delta'}{(2 \Delta^2 \sigma^3 - 2 \sigma^5 \Delta)(\sigma^2 - \Delta)} + \frac{\sigma^7 r^2 e^{2\phi} \Delta \gamma \alpha}{(2 \Delta^2 \sigma^3 - 2 \sigma^5 \Delta)(\sigma^2 - \Delta)} \\
& - \frac{\Delta^4 r^2 \phi' \sigma' \sigma^2 e^{2\phi}}{(2 \Delta^2 \sigma^3 - 2 \sigma^5 \Delta)} + \frac{\Delta' r^2 \phi' \sigma^3 e^{2\phi} \Delta^3}{(2 \Delta^2 \sigma^3 - 2 \sigma^5 \Delta)} \\
& + 3 \frac{\sigma^3 r^2 e^{2\phi} \Delta^5 \phi'^2}{(\Delta^2 \sigma^3 - \sigma^5 \Delta)(\sigma^2 - \Delta)} - \frac{\sigma^7 r^4 e^{4\phi} \Delta^2 \gamma^2}{(4 \Delta^2 \sigma^3 - 4 \sigma^5 \Delta)(\sigma^2 - \Delta)}
\end{aligned}$$

Важно отметить, что система (2.10) является вырожденной в том смысле, что два уравнения (2.5) и (2.6) определяют связь между переменными  $\alpha$  и  $\beta$ :

$$\dot{\alpha} + \Lambda \dot{\beta} = G. \quad (2.11)$$

Для исследования устойчивости положения равновесия автономной системы (2.10) необходимо найти ее точки покоя. Как было отмечено выше, точка покоя определяется с некоторой точностью по асимптотическим разложениям в окрестности особой точки СДС. Так как система уравнений является вырожденной, рассмотрим ее частный случай, а именно:

$$\begin{cases} \dot{\Delta} = \alpha \\ \dot{\sigma} = \beta \\ \dot{\phi} = \gamma \\ \dot{\alpha} = G_1 \\ \dot{\beta} = G_2 \\ \dot{\gamma} = F \end{cases} \quad (2.12)$$

где функции  $G_1$  и  $G_2$  такие, что  $G_1 + \lambda G_2 = G$ . Все возможные точки покоя новой системы (2.12) есть точки покоя и системы (2.10), (обратное утверждение неверно). Таким образом, если тривиальное равновесное решение (ТРР) с системы (2.12), соответствующее некоторой точке покоя  $P^*$ , будет асимптотически устойчивым, то ТРР системы (2.10), соответствующее этой же точке, также будет асимптотически устойчивым. Если же ТРР системы (2.12) не будет асимптотически устойчивым, то об устойчивости исходной системы (2.10) мы сказать ничего не сможем, и потребуются дополнительные исследования.

Положим  $G_1 = -G$  и  $G_2 = 2G/\Lambda$ . Заметим, что на основе численных оценок функция  $\Lambda$  "хорошая" в том смысле, что  $\Lambda \neq 0$ ,  $\Lambda \neq \infty$  и медленно меняется вблизи СДС  $r \approx r_s$ .

Далее исследуем точки покоя автономной системы (2.12).

Пусть точка  $P^* = P^*(\phi^*, \Delta^*, \sigma^*, \alpha^*, \beta^*, \gamma^*)$  является точкой покоя системы (2.12), то есть

$$f_i(\phi^*, \Delta^*, \sigma^*, \alpha^*, \beta^*, \gamma^*) = 0,$$

где  $f_i \in \{F, -G, 2G/\Lambda, \alpha, \beta, \gamma\}$  и  $i = 1, 2, \dots, 6$ .

ТРР, которое соответствует точке покоя  $P^*$ , асимптотически устойчиво, если система первого приближения устойчива. Система первого приближения имеет вид:

$$\frac{df_i}{dt} = \sum_{k=0}^6 \left( \frac{\partial f}{\partial y_k} \right) (y_k - y_{k0}), \quad (2.13)$$

где  $y_k \in \{\phi, \Delta, \sigma, \alpha, \beta, \gamma\}$  и  $y_{k0} \in \{\phi^*, \Delta^*, \sigma^*, \alpha^*, \beta^*, \gamma^*\}$ , а все частные производные берутся в точке покоя  $P^*$ . Система (2.13) устойчива, если все корни характеристического уравнения

$$\det \left[ \left( \frac{df_i}{dy_k} \right) \Big|_{\text{т.покоя}} - s \delta_k^i \right] = 0 \quad (2.14)$$

где  $y_k \in \{\phi, \Delta, \sigma, \alpha, \beta, \gamma\}$  имеют отрицательные действительные части. Тривиальное решение будет неустойчивым, если характеристическое уравнение (2.14) имеет хотя бы один корень с положительной действительной частью. Если нет корней с положительной действительной частью, но среди корней есть чисто мнимые, то требуется дополнительное исследование (поиск соответствующей функции Ляпунова).

Найдем точку покоя системы (2.12), используя асимптотические разложения (2.7) - (2.9) вблизи СДС  $r \approx r_s$  из условия:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha|_{\text{т.покоя}} = 0 \\ \beta|_{\text{т.покоя}} = 0 \\ \gamma|_{\text{т.покоя}} = 0 \\ -G|_{\text{т.покоя}} = 0 \\ (2G/\Lambda)|_{\text{т.покоя}} = 0 \\ F|_{\text{т.покоя}} = 0 \end{array} \right. \quad (2.15)$$

В точке покоя  $P^*$   $\alpha = \beta = \gamma = 0$ . Далее, из условия

$$\left\{ \begin{array}{l} G|_{\text{т.покоя}} = \frac{G_{-1/2}(\eta)}{\sqrt{r-r_s}} + G_0(\eta, r_s, \sigma_2) + G_{1/2}(\eta, r_s, \sigma_2) \cdot \sqrt{(r-r_s)} \\ \quad + o(\sqrt{r-r_s}) = 0 \\ F|_{\text{т.покоя}} = \frac{F_{-1/2}(\eta)}{\sqrt{r-r_s}} + F_0(\eta, r_s, \sigma_2) + F_{1/2}(\eta, r_s, \sigma_2) \cdot \sqrt{(r-r_s)} \\ \quad + o(\sqrt{r-r_s}) = 0 \end{array} \right. \quad (2.16)$$

путем приравнивания соответствующих коэффициентов при степенях  $r - r_s$ , получим  $\eta = \eta^* = C_1$ ,  $\sigma_2 = \sigma_2(r_s) = C_2/r_s^{1/2}$ , где  $C_1$  и  $C_2$  есть численные константы. Отметим, что, так как в (2.16) коэффициенты при  $1/\sqrt{r - r_s}$  зависят только от одной переменной  $\eta$ , то точка покоя может быть найдена с точностью, не превышающей  $10^{-2}$ , или, сформулировав иначе, исследуется окрестность СДС радиуса  $10^{-2}$ .

Далее, составим характеристическое уравнение для системы (2.15), определяемое матрицей  $M$ :

$$M = \begin{bmatrix} -s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -s & 0 & 0 & 0 \\ A_{4,1} & A_{4,2} & A_{4,3} & A_{4,4} - s & A_{4,5} & A_{4,6} \\ A_{5,1} & A_{5,2} & A_{5,3} & A_{5,4} & A_{5,5} - s & A_{5,6} \\ A_{6,1} & A_{6,2} & A_{6,3} & A_{6,4} & A_{6,5} & A_{6,6} - s \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} A_{4,1} &= -\frac{\partial G}{\partial \Delta}, A_{4,2} = -\frac{\partial G}{\partial \sigma}, A_{4,3} = -\frac{\partial G}{\partial \phi}, A_{4,4} = -\frac{\partial G}{\partial \alpha}, \\ A_{4,5} &= -\frac{\partial G}{\partial \beta}, A_{4,6} = -\frac{\partial G}{\partial \gamma}, A_{5,1} = \frac{\partial(2G/\Lambda)}{\partial \Delta}, A_{5,2} = \frac{\partial(2G/\Lambda)}{\partial \sigma}, \\ A_{5,3} &= \frac{\partial(2G/\Lambda)}{\partial \phi}, A_{5,4} = \frac{\partial(2G/\Lambda)}{\partial \alpha}, A_{5,5} = \frac{\partial(2G/\Lambda)}{\partial \beta}, \\ A_{5,6} &= \frac{\partial(2G/\Lambda)}{\partial \gamma}, A_{6,1} = \frac{\partial F}{\partial \Delta}, A_{6,2} = \frac{\partial F}{\partial \sigma}, \\ A_{6,3} &= \frac{\partial F}{\partial \phi}, A_{6,4} = \frac{\partial F}{\partial \alpha}, A_{6,5} = \frac{\partial F}{\partial \beta}, A_{6,6} = \frac{\partial F}{\partial \gamma}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Det } M &= -A_{5,2} A_{4,6} s^2 A_{6,5} - A_{6,4} s^3 A_{4,5} A_{5,6} - A_{6,2} A_{4,5} s^2 A_{5,6} \\ &+ A_{6,2} A_{4,6} s^2 A_{5,5} - A_{6,4} s^4 A_{4,6} + s^4 A_{4,4} A_{5,5} \\ &- A_{5,4} s^3 A_{4,6} A_{6,5} + A_{5,2} A_{4,5} s^2 A_{6,6} + A_{6,4} s^3 A_{4,6} A_{5,5} \\ &- A_{4,2} s^2 A_{5,5} A_{6,6} + A_{4,2} A_{5,6} s^2 A_{6,5} - A_{5,4} s^4 A_{4,5} \\ &- A_{5,2} A_{4,5} s^3 + A_{5,4} s^3 A_{4,5} A_{6,6} + s^3 A_{4,4} A_{5,6} A_{6,5} \\ &- A_{4,2} s^4 + s^4 A_{4,4} A_{6,6} + s^4 A_{5,5} A_{6,6} - s^4 A_{5,6} A_{6,5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + A_{4,2} s^3 A_{5,5} + A_{4,2} s^3 A_{6,6} - s^3 A_{4,4} A_{5,5} A_{6,6} \\
& - s^5 A_{4,4} + s^6 - s^5 A_{5,5} - s^5 A_{6,6} - A_{6,2} A_{4,6} s^3 \quad (2.17)
\end{aligned}$$

Определитель (2.17) равен нулю в шести точках. Четыре из них строго равны нулю, одна отрицательна и по модулю на три порядка превышает точность нахождения точки покоя, и шестая точка положительна, но по модулю меньше точности нахождения точки покоя. Таким образом, при заданной точности, обусловленной выбором асимптотик, исследование системы первого приближения не дает однозначного ответа на вопрос об асимптотической устойчивости системы (2.12), а, следовательно, и исходной системы (2.10). Построение функции Ляпунова [108] для данной сильно нелинейной системы дифференциальных уравнений не представляется возможным. Для выяснения устойчивости окрестности особой точки СДС, введем нестационарную метрику и рассмотрим метод вариаций.

## 2.5 Исследование устойчивости уравнения в вариациях методом сведения к задаче Шредингера

Полученная в предыдущем разделе точка покоя системы (2.12), является, очевидно, и точкой покоя исходной системы (2.10). Покажем, что эта точка устойчива методом сведения к задаче Шредингера исходных полевых уравнений.

Придадим малые приращения, зависящие от времени, метрическим функциям и дилатону.

$$\begin{aligned}
\Delta(r, t) &= \Delta(r) + \delta \Delta(r, t) = \Delta(r) + \delta \Delta(r) e^{i\omega t}, \\
\sigma(r, t) &= \sigma(r) + \delta \sigma(r, t) = \sigma(r) + \delta \sigma(r) e^{i\omega t}, \\
\phi(r, t) &= \phi(r) + \delta \phi(r, t) = \phi(r) + \delta \phi(r) e^{i\omega t}, \quad (2.18)
\end{aligned}$$

где вариации  $\delta \Delta(r, t)$ ,  $\delta \sigma(r, t)$  и  $\delta \phi(r, t)$  предполагаются малыми. Таким образом, будем рассматривать малые возмущения по времени на

фоне стационарной метрики и независящего от времени дилатонного поля. Уравнения поля (2.3)-(2.6) примут вид:

$$\begin{aligned}
0 &= A_{i1}\delta\ddot{\phi} + A_{i2}\delta\dot{\phi} + A_{i3}\delta\phi + A_{i4}\delta\phi' + A_{i5}\delta\phi'' \\
&+ B_{i1}\delta\ddot{\Delta} + B_{i2}\delta\dot{\Delta} + B_{i3}\delta\Delta + B_{i4}\delta\Delta' + B_{i5}\delta\Delta'' \\
&+ C_{i1}\delta\ddot{\sigma} + C_{i2}\delta\dot{\sigma} + C_{i3}\delta\sigma + C_{i4}\delta\sigma' + A_{i5}\delta\sigma'', \tag{2.19}
\end{aligned}$$

где  $i = 1..4$ . В выражении (2.19) ненулевые коэффициенты следующие:

$$\begin{aligned}
A_{41} &= -2\Delta'\sigma^3\Delta^2 + 4\sigma'\sigma^2\Delta^3, \\
A_{43} &= \Delta^4 r\phi'^2\sigma^3 e^{2\phi} + \Delta'\sigma^3 e^{2\phi}\Delta^3 - \Delta^4\sigma'\sigma^2 e^{2\phi} + \frac{1}{2}r\Delta''\sigma^3 e^{2\phi}\Delta^3 \\
&- \frac{1}{2}r\Delta'\sigma'\sigma^2 e^{2\phi}\Delta^3, \\
A_{44} &= \Delta^4 r\phi'\sigma^3 e^{2\phi} - 6\Delta^4\Delta'\sigma' + 2\Delta^4\Delta''\sigma - 8\Delta^4\phi'\Delta'\sigma \\
&+ 2\Delta'^2\sigma\Delta^3, \\
A_{45} &= 2\Delta^4\Delta'\sigma, \\
B_{41} &= 2\phi'\sigma^3\Delta^2 + \frac{1}{4}\sigma^5 r e^{2\phi}\Delta, \\
B_{43} &= -24\Delta^3\phi'\Delta'\sigma' + 8\Delta^3\phi''\Delta'\sigma + 6\Delta'^2\phi'\sigma\Delta^2 - 16\Delta^3\phi'^2\Delta'\sigma \\
&+ 2\Delta^3 r\phi'^2\sigma^3 e^{2\phi} - 2\Delta^3\sigma'\sigma^2 e^{2\phi} - \frac{3}{4}r\Delta'\sigma'\sigma^2 e^{2\phi}\Delta^2 \\
&+ \frac{3}{4}r\Delta''\sigma^3 e^{2\phi}\Delta^2 + \frac{3}{2}\Delta'\sigma^3 e^{2\phi}\Delta^2 + 8\Delta^3\phi'\Delta''\sigma, \\
B_{44} &= 2\Delta^4\phi''\sigma - 6\Delta^4\phi'\sigma' - \frac{1}{4}r\sigma'\sigma^2 e^{2\phi}\Delta^3 - 4\Delta^4\phi'^2\sigma \\
&+ \frac{1}{2}\sigma^3 e^{2\phi}\Delta^3 + 4\Delta'\phi'\sigma\Delta^3, \\
B_{45} &= 2\Delta^4\phi'\sigma + \frac{1}{4}r\sigma^3 e^{2\phi}\Delta^3, \\
C_{41} &= -4\phi'\sigma^2\Delta^3 - \frac{1}{2}r\sigma^4 e^{2\phi}\Delta^2, \\
C_{43} &= -\frac{1}{2}r\Delta'\sigma'\sigma e^{2\phi}\Delta^3 + \frac{3}{2}\Delta^4 r\phi'^2\sigma^2 e^{2\phi} + \frac{3}{2}\Delta'\sigma^2 e^{2\phi}\Delta^3 \\
&- \Delta^4\sigma'\sigma e^{2\phi} + 2\Delta^4\phi'\Delta'' - 4\Delta^4\phi'^2\Delta' \\
&+ 2\Delta'^2\phi'\Delta^3 + 2\Delta^4\phi''\Delta' + \frac{3}{4}r\Delta''\sigma^2 e^{2\phi}\Delta^3, \\
C_{44} &= -\frac{1}{4}r\Delta'\sigma^2 e^{2\phi}\Delta^3 - \frac{1}{2}\Delta^4\sigma^2 e^{2\phi} - 6\Delta^4\phi'\Delta',
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
A_{31} &= \frac{1}{2} \sigma^5 r^2 e^{2\phi} \Delta^2, \\
A_{33} &= -\Delta^4 r^2 \phi'' \sigma^3 e^{2\phi} - 2 \Delta^4 r \phi' \sigma^3 e^{2\phi} + \Delta^4 r^2 \phi' \sigma' \sigma^2 e^{2\phi} \\
&\quad - \Delta' r^2 \phi' \sigma^3 e^{2\phi} \Delta^3, \\
A_{34} &= -\Delta^4 r \sigma^3 e^{2\phi} + \frac{1}{2} \Delta^4 r^2 \sigma' \sigma^2 e^{2\phi} - \frac{1}{2} \Delta' r^2 \sigma^3 e^{2\phi} \Delta^3, \\
A_{35} &= -\frac{1}{2} \Delta^4 r^2 \sigma^3 e^{2\phi}, \\
B_{31} &= \sigma^3 \Delta^2 - \sigma^5 \Delta, \\
B_{33} &= 3 \Delta'^2 \sigma \Delta^2 - 4 \Delta^3 r \phi' \sigma^3 e^{2\phi} - 2 \Delta^3 r^2 \phi'' \sigma^3 e^{2\phi} + 4 \Delta^3 \Delta'' \sigma \\
&\quad + 3 \Delta' \sigma' \sigma^2 \Delta^2 - 12 \Delta^3 \Delta' \sigma' - 3 \Delta'' \sigma^3 \Delta^2 \\
&\quad - \frac{3}{2} \Delta' r^2 \phi' \sigma^3 e^{2\phi} \Delta^2 + 2 \Delta^3 r^2 \phi' \sigma' \sigma^2 e^{2\phi}, \\
B_{34} &= -3 \Delta^4 \sigma' - \frac{1}{2} r^2 \phi' \sigma^3 e^{2\phi} \Delta^3 + \sigma' \sigma^2 \Delta^3 + 2 \Delta' \sigma \Delta^3, \\
B_{35} &= \Delta^4 \sigma - \sigma^3 \Delta^3, \\
C_{31} &= -2 \sigma^2 \Delta^3 + 2 \sigma^4 \Delta^2, \\
C_{33} &= \Delta'^2 \Delta^3 - 3 \Delta^4 r \phi' \sigma^2 e^{2\phi} - \frac{3}{2} \Delta^4 r^2 \phi'' \sigma^2 e^{2\phi} + 2 \Delta' \sigma' \sigma \Delta^3 \\
&\quad - 3 \Delta'' \sigma^2 \Delta^3 - \frac{3}{2} \Delta' r^2 \phi' \sigma^2 e^{2\phi(r)} \Delta^3 \\
&\quad + \Delta^4 \Delta'' + \Delta^4 r^2 \phi' \sigma' \sigma e^{2\phi}, \\
C_{34} &= \Delta' \sigma^2 \Delta^3 - 3 \Delta^4 \Delta' + \frac{1}{2} \Delta^4 r^2 \phi' \sigma^2 e^{2\phi}, \\
A_{21} &= 2 \sigma^4 \Delta - 2 \sigma^2 \Delta^2, \\
A_{23} &= \frac{1}{2} r \Delta' \sigma^2 e^{2\phi} \Delta^2 - \frac{1}{2} \sigma^4 e^{2\phi} \Delta^2 + \frac{1}{2} \Delta^3 \sigma^2 e^{2\phi} - \frac{1}{2} \Delta^3 r^2 \phi'^2 \sigma^2 e^{2\phi}, \\
A_{24} &= -\frac{1}{2} \Delta^3 r^2 \phi' \sigma^2 e^{2\phi} + 3 \Delta^3 \Delta' - \Delta' \sigma'^2 \Delta'^2, \\
B_{23} &= -\frac{3}{4} \Delta^2 r^2 \phi'^2 \sigma^2 e^{2\phi} - \frac{1}{2} \sigma^4 e^{2\phi} \Delta + \frac{1}{2} r \Delta' \sigma^2 e^{2\phi} \Delta - 2 \phi' \Delta' \sigma^2 \Delta \\
&\quad + \frac{3}{4} \Delta^2 \sigma^2 e^{2\phi} + 9 \Delta^2 \phi' \Delta', \\
B_{24} &= 3 \Delta^3 \phi' - \phi' \sigma^2 \Delta^2 + \frac{1}{4} r \sigma^2 e^{2\phi} \Delta^2, \\
C_{23} &= \frac{1}{2} \Delta^3 \sigma e^{2\phi} - \frac{1}{2} \Delta^3 r^2 \phi'^2 \sigma e^{2\phi} - \sigma^3 e^{2\phi} \Delta^2 + \frac{1}{2} r \Delta' \sigma' e^{2\phi} \Delta^2 \\
&\quad - 2 \phi' \Delta' \sigma \Delta^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{11} &= -\sigma^5 + \sigma^3 \Delta, \\
A_{13} &= \frac{1}{2} r^2 \phi'^2 \sigma^3 e^{2\phi} \Delta^2 - \frac{1}{2} r \sigma' \sigma^2 e^{2\phi} \Delta^2, \\
A_{14} &= -3 \Delta^3 \sigma' + \sigma' \sigma^2 \Delta^2 + \frac{1}{2} r^2 \phi' \sigma^3 e^{2\phi} \Delta^2 - 4 \Delta^3 \phi' \sigma + 4 \phi' \sigma^3 \Delta^2, \\
A_{15} &= -\sigma^3 \Delta^2 + \Delta^3 \sigma, \\
B_{13} &= -\frac{1}{2} r \sigma' \sigma^2 e^{2\phi} \Delta - 2 \phi'' \sigma^3 \Delta + \frac{1}{2} r^2 \phi'^2 \sigma^3 e^{2\phi} \Delta + 3 \Delta^2 \phi'' \sigma \\
&\quad - 9 \Delta^2 \phi' \sigma' + 2 \phi' \sigma' \sigma^2 \Delta - 6 \Delta^2 \phi'^2 \sigma + 4 \phi'^2 \sigma^3 \Delta, \\
C_{13} &= \Delta^3 \phi'' - 2 \Delta^3 \phi'^2 - 3 \phi'' \sigma^2 \Delta^2 + 2 \phi' \sigma' \sigma \Delta^2 \\
&\quad - \frac{1}{2} r \sigma' \sigma e^{2\phi} \Delta^2 + \frac{3}{4} \Delta^2 r^2 \phi'^2 \sigma^2 e^{2\phi} + 6 \phi'^2 \sigma^2 \Delta^2, \\
C_{14} &= \phi' \sigma^2 \Delta^2 - \frac{1}{4} r \sigma^2 e^{2\phi} \Delta^2 - 3 \Delta^3 \phi'.
\end{aligned}$$

Рассмотрим более подробно полученные четыре соотношения для вариаций. Сведем эту систему к операторному уравнению относительно вариаций дилатонного поля. С учетом равенства нулю части коэффициентов в (2.19) и принимая во внимание, что второе уравнение системы (2.3)-(2.6) есть линейная комбинация остальных трех, получаем:

$$\begin{aligned}
0 &= A_{11} \delta \ddot{\phi} + A_{13} \delta \phi + A_{14} \delta \phi' + A_{15} \delta \phi'' + B_{13} \delta \Delta + C_{13} \delta \sigma \\
&\quad + C_{14} \delta \sigma'
\end{aligned} \tag{2.20}$$

$$\begin{aligned}
0 &= A_{31} \delta \ddot{\phi} + A_{33} \delta \phi + A_{34} \delta \phi' + A_{35} \delta \phi'' + B_{33} \delta \Delta + B_{34} \delta \Delta' \\
&\quad + C_{33} \delta \sigma + C_{34} \delta \sigma' + \left( B_{31} \delta \ddot{\Delta} + B_{35} \delta \Delta'' + C_{31} \delta \ddot{\sigma} \right)
\end{aligned} \tag{2.21}$$

$$\begin{aligned}
0 &= A_{41} \delta \ddot{\phi} + A_{43} \delta \phi + A_{44} \delta \phi' + A_{45} \delta \phi'' + B_{43} \delta \Delta + B_{44} \delta \Delta' \\
&\quad + C_{43} \delta \sigma + C_{44} \delta \sigma' + \left( B_{41} \delta \ddot{\Delta} + B_{45} \delta \Delta'' + C_{41} \delta \ddot{\sigma} \right)
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Оказывается, выражения в скобках в уравнениях (2.21) и (2.22) – линейно зависимы (этот факт есть следствие вырожденности автономной системы (2.10)). Следовательно, можно привести эти два уравнения к

одному:

$$\begin{aligned}
0 = & \left( \frac{C_{33}}{B_{31}} - \frac{C_{43}}{B_{41}} \right) \delta\sigma + \left( -\frac{C_{44}}{B_{41}} + \frac{C_{34}}{B_{31}} \right) \delta\sigma' + \left( -\frac{B_{44}}{B_{41}} + \frac{B_{34}}{B_{31}} \right) \delta\Delta' \\
& + \left( \frac{B_{33}}{B_{31}} - \frac{B_{43}}{B_{41}} \right) \delta\Delta + \frac{A_{33} \delta\phi}{B_{31}} + \frac{A_{34} \delta\phi'}{B_{31}} + \frac{A_{35} \delta\phi''}{B_{31}} \\
& - \frac{A_{41} \delta\ddot{\phi}}{B_{41}} - \frac{A_{44} \delta\phi'}{B_{41}} - \frac{A_{43} \delta\phi}{B_{41}} - \frac{A_{45} \delta\phi''}{B_{41}}
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Составим операторное уравнение Шредингера для вариаций дилатонного поля. Вариации метрических функций, введенные в (2.19), есть величины малые, такие, что:

$$|\delta\Delta(r)| = \epsilon_1(r), |\delta\Delta'(r)| = \epsilon_2(r), |\delta\sigma(r)| = \epsilon_3(r), |\delta\sigma'(r)| = \epsilon_4(r).$$

Если вариации метрических функций есть величины, меньшие точности нахождения точки покоя автономной системы (2.10) ( $10^{-2}$ ), то ими можно пренебречь. Пусть  $\epsilon(r) = \max\{\epsilon_1(r), \epsilon_2(r), \epsilon_3(r), \epsilon_4(r)\}$ ,  $10^{-2} < \epsilon < 1$  Тогда уравнения (2.20) и (2.23) переписутся в виде:

$$\begin{aligned}
0 = & \left( \frac{B_{13}}{A_{11}} + \frac{C_{13}}{A_{11}} + \frac{C_{14}}{A_{11}} \right) \epsilon + \delta\ddot{\phi} + \frac{A_{13} \delta\phi}{A_{11}} + \frac{A_{14} \delta\phi'}{A_{11}} + \frac{A_{15} \delta\phi''}{A_{11}} \\
0 = & \left( \frac{A_{33}}{B_{31}} - \frac{A_{43}}{B_{41}} \right) \delta\phi + \left( \frac{A_{34}}{B_{31}} - \frac{A_{44}}{B_{41}} \right) \delta\phi' + \left( \frac{A_{35}}{B_{31}} - \frac{A_{45}}{B_{41}} \right) \delta\phi'' \\
& + \left( \frac{A_{31}}{B_{31}} - \frac{A_{41}}{B_{41}} \right) \delta\ddot{\phi} \\
& + \left( \frac{C_{33}}{B_{31}} - \frac{C_{43}}{B_{41}} - \frac{C_{44}}{B_{41}} + \frac{C_{34}}{B_{31}} - \frac{B_{44}}{B_{41}} + \frac{B_{34}}{B_{31}} + \frac{B_{33}}{B_{31}} - \frac{B_{43}}{B_{41}} \right) \epsilon
\end{aligned}$$

Поле  $\phi = \phi(r, t)$  и его вариации определяются с учетом (2.18). Выразим  $\epsilon(r)$  из первого уравнения и подставим во второе. Получим операторное уравнение типа уравнения Шредингера, для которого характеристическое уравнение на собственные значения и его решения в силу громоздкости приведены в Приложениях (Приложение 1).

Оказывается, что у полученного характеристического уравнения отрицательных собственных значений нет. Следовательно, все  $\omega$  действительны и малые возмущения не растут со временем. Они либо осциллируют ( $\omega^2 > 0$ ), либо вообще не зависят от времени. В этом случае

решение устойчиво (если бы было хотя бы одно отрицательное собственное значение,  $\omega^2 = -\Omega^2$ , то возмущение  $\sim e^{\Omega t}$  экспоненциально росло бы со временем, то есть решение было бы неустойчиво).

## 2.6 Выводы

Принимая во внимания оба результата: устойчивость полевых уравнений относительно временных возмущений вблизи регулярного горизонта событий, полученная в работах других авторов, а также впервые полученную устойчивость сферической детерминантной сингулярности, можно заключить, что решение типа "черная дыра" в обобщенной четырехмерной модели Эйнштейна-Гильберта с высшими поправками по кривизне и скалярным дилатонным полем устойчиво во всех особых точках.

## Глава 3

# Параметры ранней Вселенной и первичные черные дыры

### 3.1 Введение

В настоящий момент времени общепризнанной теорией ранней стадии эволюции Вселенной является теория инфляции [9]. Согласно этой теории, ранняя Вселенная экспоненциально расширяется, а затем вступает в фазу разогрева, когда температура вещества повышается до  $T = T_{rh}$  (от англ. reheating) [109]. Температура разогрева определяется уровнем энергии частиц скалярного поля, которое обеспечивает инфляцию [110].

Важной задачей для возможных дальнейших попыток экспериментального обнаружения ПЧД является выяснение условий, при которых реликтовые остатки ПЧД успевают образоваться к настоящему моменту времени согласно представлениям современной космологии. Такой реликтовый остаток может существовать в настоящий момент времени  $t_0$  во Вселенной при условии, что в момент времени разогрева  $t = t_{rh}$  [109] масса ПЧД не превосходила критического значения  $M = M^* \approx 10^{15}$  г. При  $M > M^*$  к моменту времени  $t = t_0$  ПЧД продолжали бы "испаряться" и еще не успели бы "дозволюционировать" до своих реликтовых остатков.

## 3.2 Оценка температура разогрева

Найдем условие на величину температуры разогрева, при которой к современному моменту времени процесс "испарения" первичных черных дыр завершился, и уже образовались реликтовые остатки таких объектов. Температурный интервал должен определяться критической массой первичной черной дыры. Черная дыра образуется из повышенного контраста плотности в размерах сопутствующего горизонта частиц. Следовательно, характерная (наиболее вероятная) масса черной дыры в момент времени  $t$  определяется размерами горизонта  $l \sim t$  [19].

Таким образом, характерная масса первичной черной дыры определяется общей массой внутри горизонта частиц следующим образом [19]:

$$M(t) = \frac{4}{3}\pi \left( a(t) \int_0^t \frac{d\tilde{t}}{a(\tilde{t})} \right)^3 \frac{3}{32\pi G t^2} = \gamma^{3/2} \frac{t}{t_{Pl}} m_{Pl}, \quad (3.1)$$

где  $a(t)$  - масштабный фактор, вычисленный для радиационно-доминантной Вселенной по закону  $a(t) \sim t^{1/2}$ , а через  $\gamma^{3/2}$  обозначено выражение:

$$\gamma^{3/2} = \frac{t_{Pl} c^3}{m_{Pl} G}.$$

В момент времени  $t = t_{rh}$  масса черной дыры согласно работе [19]:

$$M(t_{rh}) = \gamma^{3/2} \frac{t_{rh}}{t_{Pl}} m_{Pl}. \quad (3.2)$$

Существует несколько моделей разогрева [111], которые различаются продолжительностью во времени. В случае быстрого перехода мы можем пользоваться температурой как характеристикой эпохи. Время  $t_{rh}$  найдем из условия постоянства энтропии для двух моментов времени ( $t_{rh}$  и  $t_\gamma = t_0$ ). Это можно сделать с учетом того, что во Вселенной после разогрева не было существенных фазовых переходов со значительным скачком энтропии, на что указано в книге Долгова и др. [110]

и работе Кофмана и др. [111], а также Карра [112]. Энтропия  $S$ :

$$S = N_f(t, T)T^3 a^3,$$

где  $N_f(t, T)$  - число степеней свободы частиц, существующих на некоторый момент времени при температуре Вселенной  $T$ . Запишем равенство энтропии для современного момента времени и момента разогрева:

$$N_f|_{rh} T_{rh}^3 a(t_{rh})^3 = N_f|_{\gamma} T_{\gamma}^3 a(t_{\gamma})^3, \quad (3.3)$$

где  $T_f|_{\gamma}$  - современная температура реликтового излучения. Принимая во внимание связь масштабного фактора и красного смещения, формулу (3.3) перепишем в виде:

$$N_f|_{rh} T_{rh}^3 = N_f|_{\gamma} T_{\gamma}^3 (1 + z_{rh})^3$$

Отсутствие существенных фазовых переходов дает возможность получить связь температуры горизонта частиц и красного смещения. Это позволяет вычислить красное смещение  $z_{rh}$  в зависимости от современной температуры реликтового излучения  $T_{\gamma}$ , от числа степеней свободы на момент времени разогрева  $N_f|_{rh}$  и от числа степеней свободы фотонов на настоящий момент времени  $N_f|_{\gamma}$  ( $N_f|_{\gamma} = 2$ ).

$$1 + z_{rh} = \left( \frac{N_f|_{rh}}{2} \right)^{1/3} \frac{T_{rh}}{T_{\gamma}}. \quad (3.4)$$

Для того, чтобы вычислить массу первичной черной дыры в момент разогрева  $t = t_{rh}$  согласно формуле (3.2), нам необходимо получить связь между временем  $t_{rh}$  и красным смещением  $z_{rh}$ . Как известно [110], разогрев приходится на радиационно-доминированную стадию эволюции Вселенной. Эта стадия характеризуется следующей зависимостью давления от плотности:  $p = \epsilon/3$ . Следовательно, масштабный фактор меняется как  $a(t) \sim t^{1/2}$ . Отсюда следует, что

$$\frac{a(t_0)}{a(t_{rh})} = \left( \frac{t_0}{t_{rh}} \right)^{1/2}, \quad (3.5)$$

и, следовательно, связь красного смещения в момент разогрева с начальным моментом времени

$$1 + z_{rh} = \left( \frac{t_0}{t_{rh}} \right)^{1/2}, \quad (3.6)$$

где  $t_0 = (2/3) H_0^{-1}$  и  $H_0$  - постоянная Хаббла на сегодняшний момент времени. Согласно формулам (3.4) и (3.6), получаем связь  $t_{rh}$  и  $T_{rh}$ :

$$t_{rh} = \frac{2}{3} H_0^{-1} \left( \frac{2}{N_f|_{rh}} \right)^{2/3} \left( \frac{T_\gamma}{T_{rh}} \right)^2 \quad (3.7)$$

Тогда зависимость массы первичной черной дыры от температуры в момент разогрева с учетом формул (3.1) и (3.7) принимает вид:

$$M(t_{rh}) = \frac{2}{3} H_0^{-1} \gamma^{3/2} \frac{m_{Pl}}{t_{Pl}} \left( \frac{2}{N_f|_{rh}} \right)^{2/3} \left( \frac{T_\gamma}{T_{rh}} \right)^2. \quad (3.8)$$

Для удобства дальнейших вычислений введем обозначение

$$T_0 = \frac{2}{3} \gamma^{3/4} \left( \frac{2}{N_f|_{rh}} \right)^{1/3} \frac{1}{(t_{Pl} H_0)^{1/2}} T_\gamma$$

Тогда из (3.8)  $T_{rh} = \sqrt{m_{Pl}/M(t_{rh})} T_0$ . Рассмотрим  $M(t_{rh}) = M^* \approx 10^{15}$  г. При  $M > M^*$  реликтовых остатков первичных черных дыр к настоящему моменту времени  $t = t_0$  еще не образуется. Соответствующее неравенство для температуры разогрева:

$$T_{rh} < \left( \frac{m_{Pl}}{M^*} \right)^{1/2} T_0, \quad (3.9)$$

Оценим величину  $T_{rh}$ :  $T_{rh} < \sqrt{m_{Pl}/M^*} T_0 \approx \alpha \cdot 5.6 \cdot 10^7$  ГэВ, где

$$\alpha = \sqrt{2/3} \gamma^{3/4} \left( \frac{2}{N_f|_{rh}} \right)^{1/3} \approx 3.3 \left( \frac{2}{N_f|_{rh}} \right)^{1/3}.$$

Это означает, что если температура разогрева была меньше, чем  $\sim 10^8$  ГэВ, то к настоящему моменту времени реликтовые остатки первичных черных дыр еще не успели образоваться, и такие черные дыры все еще продолжают "испаряться".



Полученная оценка для температуры разогрева, при которой первичные черные дыры могут образовывать реликтовые остатки в настоящий момент времени, довольно проста и правильна по порядку величины. Однако при ее выводе мы не учитывали деталей эволюции Вселенной начиная с  $t = t_{rh}$  и заканчивая современной эпохой.

### 3.3 Учет пылевой стадии

Рассмотрим переход от радиационно-доминированной стадии к пылевой. В радиационно доминантной Вселенной, как уже упоминалось выше, масштабный фактор зависит от времени по закону  $a(t) \sim t^{1/2}$ . Для пылевой Вселенной давление  $p = 0$  и закон изменения масштабного фактора от времени принимает вид  $a(t) \sim t^{2/3}$ . Переход от одной стадии к другой осуществляется в так называемый момент времени ”отделения” (decoupling). Оценим теперь величину температуры разогрева более точно, то есть учитывая параметры Вселенной в момент времени отделения.

$$\frac{a(t_0)}{a(t_{rh})} = \frac{a(t_d) a(t_0)}{a(t_{rh}) a(t_d)}$$

Тогда красное смещения  $z_{rh}$  при  $t = t_{rh}$  :

$$1 + z_{rh} = \frac{a(t_0)}{a(t_{rh})} = \frac{a(t_d) a(t_0)}{a(t_{rh}) a(t_d)},$$

По определению связи масштабного фактора и красного смещения

$$\frac{a(t_0)}{a(t_d)} = 1 + z_d$$

Рассматривая радиационно-доминированную стадию, можно записать аналогично (3.5):

$$\frac{a(t_d)}{a(t_{rh})} = \left( \frac{t_d}{t_{rh}} \right)^{1/2}$$

Из трех последних формул можно выявить связь между  $t_{rh}$ ,  $t_d$ ,  $z_d$  и  $z_{rh}$ :

$$t_{rh} = t_d \left( \frac{1 + z_d}{1 + z_{rh}} \right)^2 \quad (3.10)$$

Таким образом, время разогрева зависит теперь и от условий во Вселенной в момент времени перехода от радиационно-доминированной стадии к пылевой. Аналогично предыдущим рассуждениям, для того, чтобы найти массу первичной черной дыры, определяемую формулой (3.2), нужно найти красное смещение  $z_d$  в момент времени отделения  $t = t_d$  и само время  $t_d$ . Найдем их из следующих соображений. Для некоторого фиксированного значения красного смещения  $z$  плотность пылевой материи определяется как  $\rho_m = 0.3 (3H_0^2)/(8\pi G)$ ,  $\rho_m(z) = (1+z)^3 \rho_{m_0}$ , а плотность излучения  $\rho_\gamma = 10^{-4} (3H_0^2)/(8\pi G)$ ,  $\rho_\gamma(z) = (1+z)^4 \rho_{\gamma_0}$  [110]. Откуда следует, что

$$\frac{\rho_\gamma(z)}{\rho_m(z)} = (1+z) \frac{\rho_{\gamma_0}}{\rho_{m_0}},$$

В момент времени отделения  $t = t_d$

$$\frac{\rho_\gamma(z)}{\rho_m(z)} = 1, \quad \frac{\rho_{\gamma_0}}{\rho_{m_0}} = \frac{\Omega_m}{\Omega_\gamma}, \quad z = z_d.$$

Следовательно, для красного смещения при  $t = t_d$

$$z_d = \frac{\Omega_m}{\Omega_\gamma} - 1 \approx 1.1 \cdot 10^4, \quad (3.11)$$

где

$$\Omega_\gamma = \frac{4\sigma}{c} T^4 \frac{8\pi G}{3H_0^2},$$

$\Omega_m \approx 0.2$ , и  $\sigma$  - постоянная Больцмана [113]. Соответствующее время  $t_d$ , определяемое для пылевой стадии:

$$t_d = \frac{t_0}{(1+z_d)^{3/2}} = \frac{2}{3} H_0^{-1} \frac{1}{(1+z_d)^{3/2}} \quad (3.12)$$

Таким образом, время разогрева, определяемое по формуле (3.10), зависит теперь от красного смещения в момент времени отделения.

$$t_{rh} = \frac{2}{3} H_0^{-1} \frac{1}{(1+z_d)^{3/2}} \left( \frac{1+z_d}{1+z_{rh}} \right)^2$$

Оценивая  $T_{rh}$  относительно  $M^*$  аналогично предыдущим вычислениям (сравните с соотношением (3.9)), получаем

$$T_{rh} < T_0 \left( \frac{m_{Pl}}{M^*} \right)^{1/2} (1+z_d)^{1/4} \approx \alpha \cdot 5.7 \cdot 10^8,$$

где  $T_0$  и  $\alpha$  равны соответственно:

$$T_0 = \frac{2}{3} \gamma^{3/4} \left( \frac{2}{N_f|_{rh}} \right)^{1/3} \frac{1}{(t_{Pl} H_0)^{1/2}} T_\gamma,$$

$$\alpha = \sqrt{2/3} \gamma^{3/4} \left( \frac{2}{N_f|_{rh}} \right)^{1/3} \approx 3.3 \left( \frac{2}{N_f|_{rh}} \right)^{1/3},$$

а  $z_d$  определяется условием (3.11). Величина  $N_f$  в момент времени разогрева зависит от числа частиц, существующих при данных энергиях (например, для  $E \sim 100$  ГэВ  $N_f \approx 115$  [114]). Мы видим, что при учете дополнительных условий в момент времени  $t = t_d$  нижняя граница для  $T_{rh}$  повышается. Таким образом, существование к настоящему моменту времени реликтовых остатков первичных черных дыр возможно при температурах разогрева, больших величины

$$T_{rh} \sim 2 \left( \frac{2}{N_f|_{rh}} \right)^{1/3} \cdot 10^9 \text{ ГэВ.} \quad (3.13)$$

### 3.4 Выводы

Из вышеприведенного исследования следует, что если температура разогрева превосходит  $\approx 10^9$  ГэВ, то в настоящий момент возможно существование реликтовых остатков ПЧД.

Показанная в этой главе связь между экспериментально подтвержденной теорией инфляции и ПЧД будет способствовать выявлению доказательств существования ПЧД как возможных кандидатов на роль темной материи в нашей Вселенной.

# Глава 4

## Простейшая модель испарения первичных черных дыр на последних стадиях

### 4.1 Введение

В данной главе рассматривается простейший вариант модификации закона испарения ПЧД. Простейший в том смысле, что не исследуются полевые уравнения обобщенного действия Эйнштейна-Гильберта, а в рамках полуклассической модели учитывается только простейшее, но и наиболее важное свойство упомянутых обобщенных решений, а именно: наличие ограничения на минимально возможную массу черной дыры. Даже в рамках такого простого приближения и с использованием функций Старобинского-Пейджа оказывается возможным оценить относительный состав излучаемых частиц (процентное содержание бозонов и фермионов), что даст возможность сузить рамки экспериментальных поисков ПЧД.

### 4.2 Основное состояние квазиклассической модели

Важной характеристикой решения типа "черная дыра" в обобщенной модели Эйнштейна-Гильберта с высшими поправками по кривизне и со

скалярным дилатонным полем, является существование минимально возможного размера (или массы) черной дыры. Этот размер не зависит от параметризации метрики. Ограничение на массу отсутствует в классической теории Эйнштейна-Шварцшильда, появляется при учете второго порядка по кривизне в действии (член Гаусса-Боннэ) и сохраняется при учете всего ряда по кривизне. Не существует черной дыры (статической, асимптотически-плоской, сферически-симметричной) с массой, меньшей минимальной массы  $M_{min}$ , соответствующей радиусу горизонта

$$r_h = \sqrt{\lambda} \sqrt{4\sqrt{6}} \phi_h(\phi_\infty),$$

где  $\phi_h(\phi_\infty) > 1$  — значение дилатона на горизонте, зависящее от значения дилатона на бесконечности (дополнительный внешний параметр модели). Данное состояние назовем основным для квазиклассической модели. (Рассматривается квазиклассическое состояние, которое станет основным в случае квантования модели.)

Необходимо прояснить вопрос о принципиальной возможности перехода из предпоследнего состояния ("первого возбужденного состояния") в основное. Рассматривается диагональная квазишварцшильдовская метрика вида:

$$ds^2 = \Delta(r)dt^2 - \frac{\sigma^2(r)}{\Delta(r)}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\psi^2). \quad (4.1)$$

В положении  $r_{hmin}$  (Рис.4.1) асимптотическая форма метрики (4.1) имеет вид:

$$\begin{aligned} \Delta &= const_1 * \sqrt{r - r_{hmin}}, \\ \sigma &= const_2 * \sqrt{r - r_{hmin}}, \end{aligned}$$

Следовательно,  $R_{ijkl}R^{ijkl} \approx const_3 * (r - r_{hmin})^{-6}$ , то есть инвариант кривизны расходится и это неинтегрируемая особенность. В тоже время асимптотика на горизонте во всех остальных состояниях регулярна

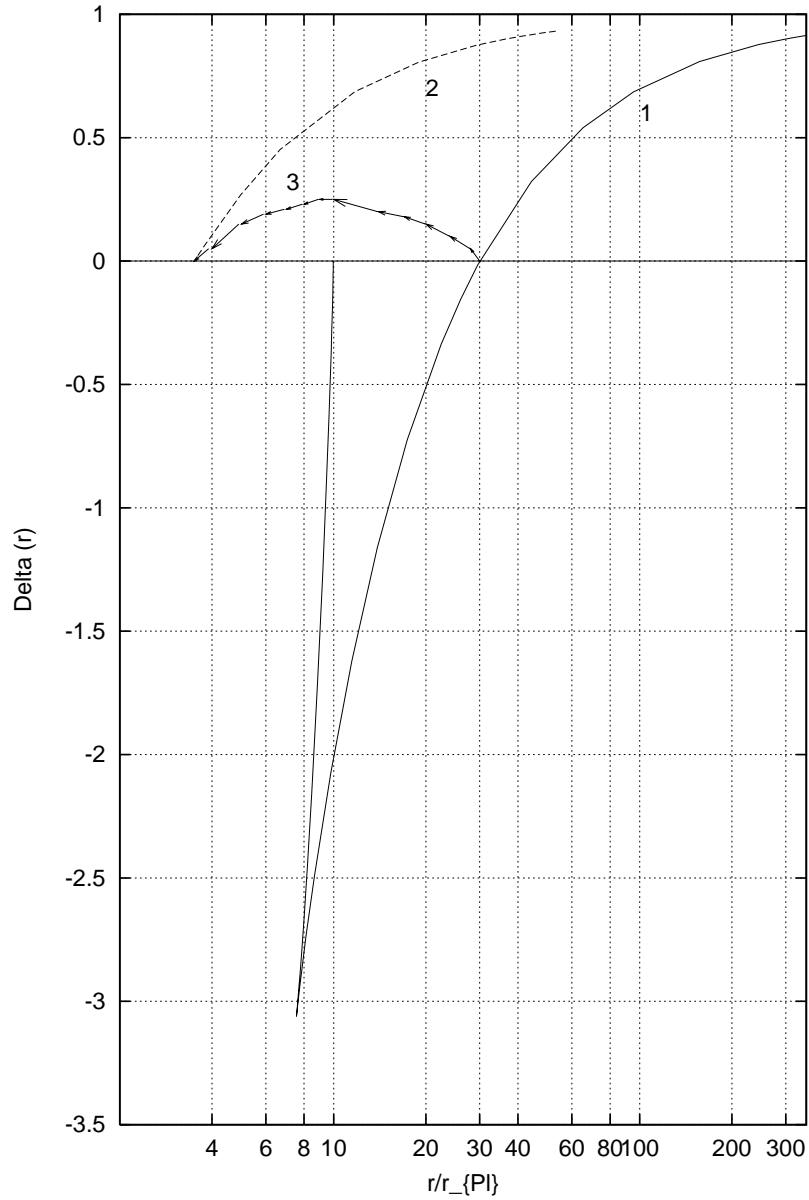


Рис. 4.1: Иллюстрация момента последнего перехода. Предпоследнее состояние (1) характеризуется наличием регулярного горизонта с конечной квази-шварцшильдовской асимптотикой. Последнее состояние (минимальная черная дыра) (2) — сингулярность, поэтому переход (3) в него запрещен законами квантовой механики. По оси  $x$  отложен безразмерный радиус черной дыры (в единицах планковской длины), по оси  $y$  отложены значения метрической функции  $\Delta$  для различных значений масс черной дыры.

и имеет квазишварцшильдовское поведение:

$$\begin{aligned}\Delta &= d_1(r - r_h) + d_2(r - r_h)^2 + \dots, \\ \sigma &= s_0 + s_1(r - r_h) + \dots,\end{aligned}\tag{4.2}$$

где  $(r - r_h) \ll 1$ ,  $s_0$  и  $r_h$  — свободные параметры. Вероятность перехода из ”первого возбужденного состояния” в основное с минимальной массой [88]:

$$\begin{aligned}P &= \text{const} * e^{S_{r_h} - S_{r_{hmin}}} = \text{const} * e^{-S_{r_{hmin}}} \\ &\propto \text{const} * e^{-\frac{1}{(r - r_{hmin})^5}} = \text{const} * e^{-\infty} = 0.\end{aligned}$$

Таким образом, данный переход запрещен и в процессе своего испарения черная дыра никогда не достигнет основного состояния.

### 4.3 Замедление испарения

Для получения остановки испарения перед достижением основного состояния  $M_{min}$  необходимо включить условие остановки испарения в классическую модель излучения (в классической модели излучения полагается, что масса излучающихся частиц много меньше массы самого излучающего объекта). Исходя из того, что масса реликтового остатка черной дыры становится сравнимой с массой излучаемых ею частиц, условие остановки испарения может быть получено из того факта, что черная дыра не может излучить больше вещества, чем она сама содержит. В стандартном подходе масса излучающихся частиц много меньше массы  $M$  самого излучающего объекта. Чем меньшей массой обладает черная дыра, тем более интенсивен процесс излучения. Причем скорость испарения обратно пропорциональна  $M^2$ :

$$-\frac{dM}{dt} \approx 4 \cdot 10^{-5} \left(\frac{m_{Pl}}{M}\right)^2 \frac{m_{Pl}}{t_{Pl}} f,\tag{4.3}$$

где  $f = 1.023h(1/2) + 0.420h(1) + 0.048h(2)$  - функция числа степеней свободы частиц со спинами 1/2, 1, 2 соответственно [20]. Рассмотрим

процесс излучения (4.3) с учетом того, что для черной дыры с массой порядка минимальной, масса излученной частицы становится сравнима с массой самого излучающего объекта. В этом случае естественно поставить условие, что черная дыра во время процесса испарения не может излучить больше вещества, чем есть в ней самой. Это условие следует из наличия запрещенного перехода между основным состоянием черной дыры и ее "возбужденными" состояниями. В обычной модели излучения Хокинга скорость потери черной дыры своей массы увеличивается до бесконечности при стремлении массы к нулю (4.3) (это объясняет, почему процесс испарения существует именно для черных дыр малой массы). В случае учета закона сохранения энергии при испарении (наиболее простейшим способом) масса черной дыры уменьшается, температура увеличивается, но средняя энергия излученной частицы и ее частота уменьшаются. Таким образом, классический спектр Планка "обрезается" тем условием, что энергия  $E$  излученной частицы не должна превосходить  $M - M_{min}$ . При излучении частиц система последовательно переходит в новые состояния, не достигая запрещенного основного состояния  $E = M - M_{min} = 0$  (Рис. 4.2).

Это условие можно учесть, введя в формулу для излучения ступенчатую функцию Хевисайда  $H$ . Таким образом, получаем:

$$\frac{d^2 N}{dE dt} = \frac{\Gamma_s(M * E) H(M - M_{min} - E)}{2\pi e^{8\pi M E} - (-1)^{2s}}, \quad (4.4)$$

где  $\Gamma_s(M * E)$  – функция Старобинского-Пейджа [29]-[31], [94]-[95], зависящая от массы, энергии и спина соответствующей частицы, излученной черной дырой следующим образом:

$$\begin{aligned} \Gamma_{s\text{бозон}} &= \left[ \frac{(l-s)!(l+s)!}{(2l)!(2l+1)!!} \right]^2 \prod_{n=1}^l \left[ 1 + \frac{16}{n^2} (ME)^2 \right] 8(ME) \left[ 2ME \right]^{2l+1}, \\ \Gamma_{s\text{фермион}} &= \left[ \frac{(l-s)!(l+s)!}{(2l)!(2l+1)!!} \right]^2 \prod_{n=1}^{l+1/2} \left[ 1 + \frac{64}{(2n-1)^2} (ME)^2 \right] \left[ 2ME \right]^{2l+1}, \end{aligned}$$

где  $l$  и  $s$  — квантовые числа,  $(M * E) \ll 1$ . В дальнейшем будет учтен вклад только мод  $l = s$ , который является доминирующим.



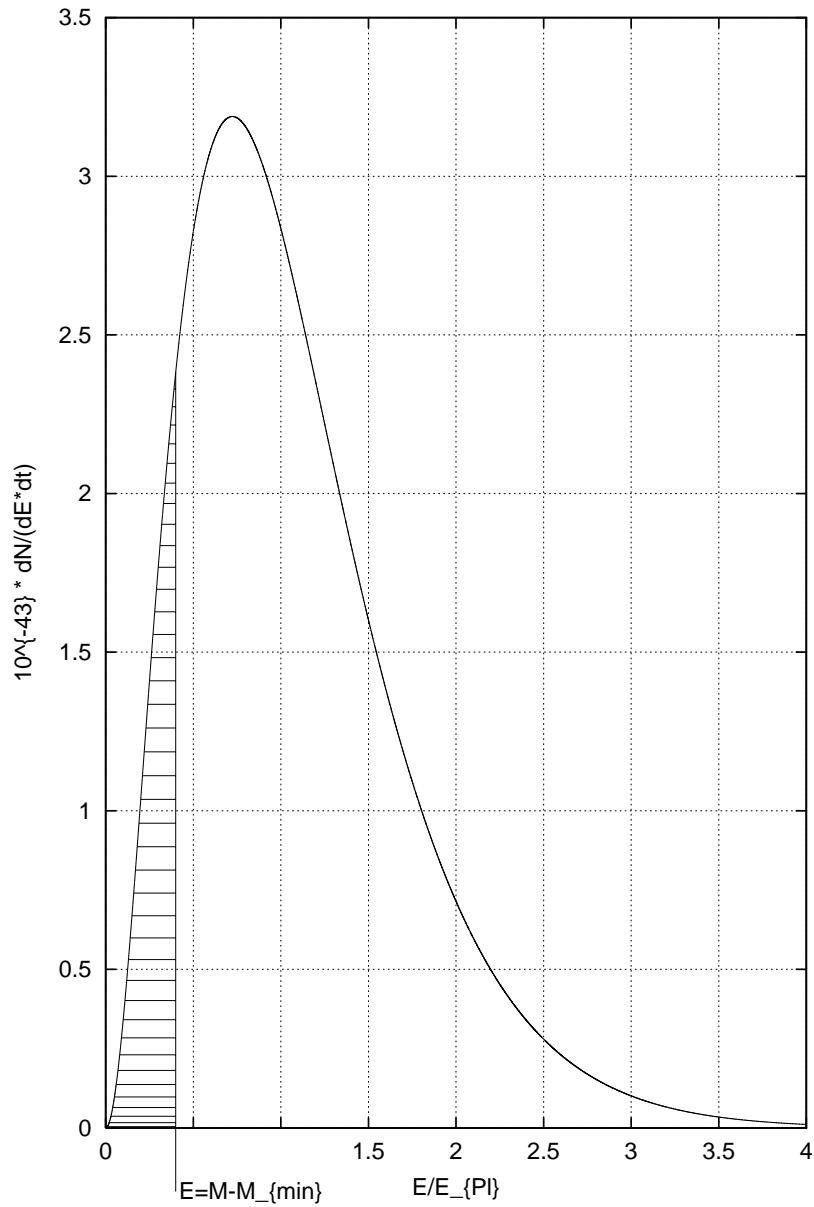


Рис. 4.2: Простейшая модель замедления и остановки испарения черной дыры на последних стадиях — введение обрезания спектра излучения Планка законом сохранения энергии. При этом, если энергия частицы лежит левее линии обрезания  $E = M - M_{\min}$  (заштрихованная область), то частица соответствующей энергии может излучиться, если правее — нет, потому что ее энергия превышает общую энергию системы, и черная дыра в этом случае может перейти в запрещенную область. Таким образом, несмотря на увеличение температуры черной дыры, происходит уменьшение энергии излученных частиц вплоть до полной остановки испарения. По оси  $x$  отложена безразмерная энергия (в планковских единицах) излучающихся частиц, по оси  $y$  — мощность излучения

С учетом (4.4) закон излучения (4.3) модифицируется:

$$-\frac{dM}{dt} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{M-M_{min}} dE \frac{\Gamma_s(M * E) E}{e^{8\pi M E} - (-1)^{2s}} \quad (4.5)$$

где интегрирование происходит уже не по всем энергиям частиц, а только до конечного предела.

## 4.4 Сравнение законов испарения бозонов и фермионов

Рассмотрим закон излучения отдельно для частиц разных спинов при  $M - M_{min} \ll 1$ . На конечных стадиях испарения соответствующие скорости уменьшения массы черной дыры могут быть представлены в виде сшивки аналитических асимптотик и рядов с соответствующими областями сходимости (Рис. 4.3).

Для частиц нулевого спина

$$\begin{aligned} -\frac{dM}{dt} &= \frac{1}{512\pi^5} \frac{1}{M^2} \int_0^{8\pi M(M-M_{min})} dx \frac{x^3}{e^x - 1} \\ &= \frac{1}{\pi^2} M(M - M_{min})^3 \left( \frac{1}{3} - \pi M(M - M_{min}) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}(8\pi M(M - M_{min}))^{2k}}{(2k + 3)(2k)!} \right). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Для частиц спина 1/2:

$$\begin{aligned} -\frac{dM}{dt} &= \frac{1}{8192\pi^5} \frac{1}{M^2} \int_0^{8\pi M(M-M_{min})} dx \frac{x^3}{e^x + 1} \\ &= \frac{1}{1024\pi^5} \frac{1}{M^2} e^{-(4\pi M(M-M_{min}))} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{E_{2k}(4\pi M(M - M_{min}))^{2k+4}}{(2k + 4)(2k)!} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{E_{2k}\gamma(2k + 4, 4\pi M(M - M_{min}))}{(2k + 4)(2k)!} \right). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Для частиц спина 1:

$$\begin{aligned} -\frac{dM}{dt} &= \frac{1}{73728\pi^7} \frac{1}{M^2} \int_0^{8\pi M(M-M_{min})} dx \frac{x^5}{e^x - 1} \\ &= \frac{4}{9\pi^2} M^3(M - M_{min})^5 \left( \frac{1}{5} - \frac{2}{3}\pi M(M - M_{min}) \right) \end{aligned}$$

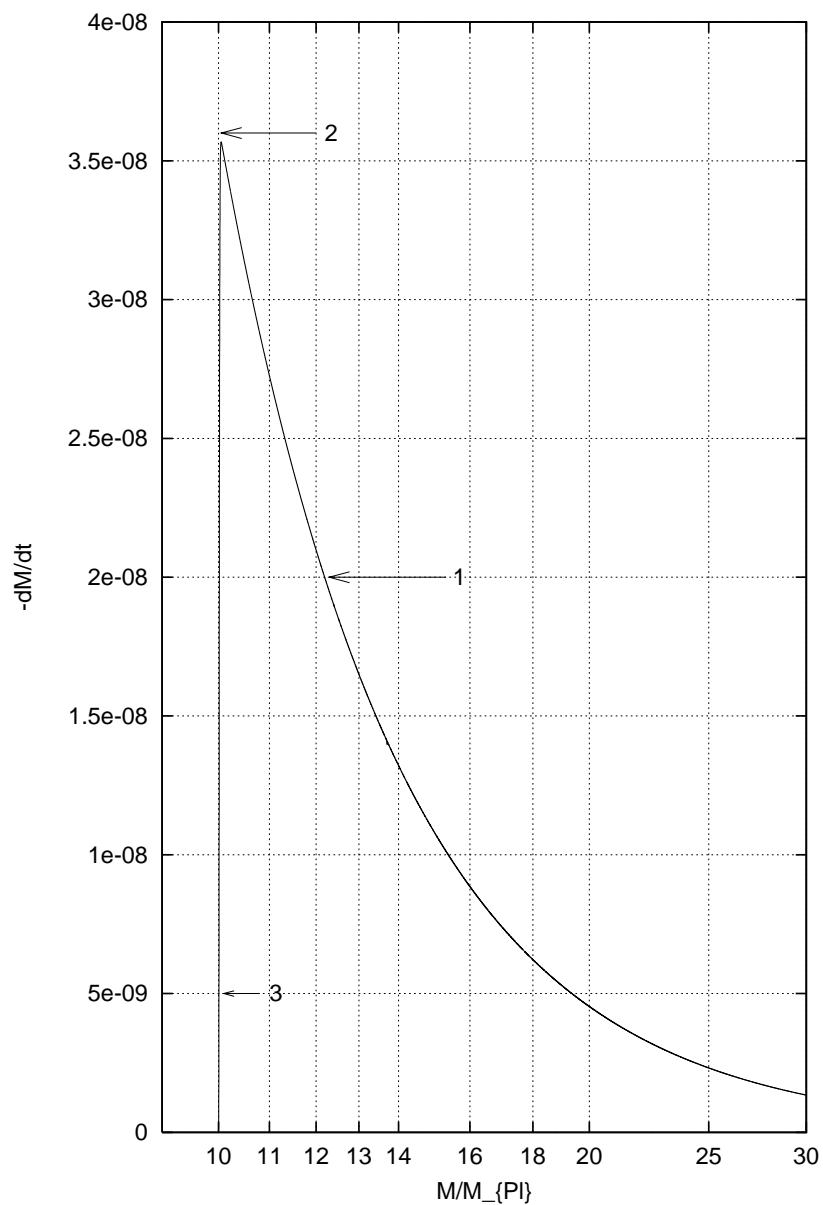


Рис. 4.3: Закон испарения черной дыры при учете закона сохранения энергии. Правая часть (цифра 1) есть обычная хокинговская часть, когда  $-dM/dt \sim 1/M^2$ . Левая часть (цифра 3) показывает остановку испарения на последних стадиях при достижении состояния с минимальной массой. Максимальная скорость испарения — цифра 2. По оси x отложена безразмерная масса (в планковских единицах), по оси y — скорость потери массы черной дырой

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}(8\pi M(M - M_{min}))^{2k}}{(2k + 5)(2k)!}. \quad (4.8)$$

Для частиц спина 2:

$$\begin{aligned} -\frac{dM}{dt} &= \frac{1}{29491200\pi^9} \frac{1}{M^2} \int_0^{8\pi M(M-M_{min})} dx \frac{x^9}{e^x - 1} \\ &= \frac{16}{225\pi^2} M^5 (M - M_{min})^7 \left( \frac{1}{7} - \frac{1}{2} \pi M (M - M_{min}) \right) \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}(8\pi M(M - M_{min}))^{2k}}{(2k + 7)(2k)!}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Область сходимости ряда в формуле (4.7) –  $|8\pi M(M - M_{min})| < \pi$ ,  $E_{2k}$  – числа Эйлера, такие что функция  $1/\text{ch}(t)$  является для них производящей:

$$\frac{1}{\text{ch}(t)} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \frac{t^n}{n!},$$

$\gamma(n, \alpha)$  - неполная гамма-функция. В формулах (4.6), (4.8), (4.9) область сходимости  $|8\pi M(M - M_{min})| < 2\pi$ , а  $B_{2k}$  – числа Бернулли, такие что функция  $1/(e^t - 1)$  является для них производящей:

$$\frac{1}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!}.$$

В пределе больших масс ( $M(M - M_{min}) \gg 1$ ) скорости испарения частиц различных спинов практически не различаются. Действительно, используя асимптотическое представление интегралов,

$$\int_0^{8\pi M(M-M_{min})} dx \frac{x^3}{e^x \pm 1} \approx \int_0^{\infty} dx \frac{x^3}{e^x \pm 1} - \int_{8\pi M(M-M_{min})}^{\infty} dx x^3 e^{-x},$$

а также учитывая, что функция Пейджа в (4.4) в пределе больших масс есть просто  $\Gamma_s(M * E) = M^2 E^2$  вне зависимости от спина излучаемых частиц, получаем для бозонов ( $s=0,1,2$ ):

$$\begin{aligned} -\frac{dM}{dt} &= \frac{1}{128\pi^3} \frac{1}{M^2} \int_0^{8\pi M(M-M_{min})} dx \frac{M^2 x^3}{e^x - 1} \approx \frac{1}{128\pi^3} \left( \frac{\pi^4}{15} - e^{-A} (A^3 \right. \\ &+ \left. 3A^2 + 6A + 6) \right), \end{aligned}$$

а для фермионов

$$\begin{aligned} -\frac{dM}{dt} &= \frac{1}{128\pi^3} \frac{1}{M^2} \int_0^{8\pi M(M-M_{min})} dx \frac{M^2 x^3}{e^x + 1} \approx \frac{1}{128\pi^3} \left( \frac{7\pi^4}{120} - e^{-A} (A^3 \right. \\ &+ \left. 3A^2 + 6A + 6) \right), \end{aligned}$$

где  $A = 8\pi M(M - M_{min})$ . Таким образом, на бесконечности, то есть в классическом приближении больших масс, отношение скоростей излучения бозона и фермиона составляет  $8/7$ . При  $M(M - M_{min}) \ll 1$  естественно применить другую аппроксимацию:

$$-\left. \frac{dM}{dt} \right|_{s=0} \approx \frac{1}{3\pi^2} M(M - M_{min})^3, \quad (4.10)$$

$$-\left. \frac{dM}{dt} \right|_{s=1/2} \approx \frac{1}{16\pi} M^2(M - M_{min})^4, \quad (4.11)$$

$$-\left. \frac{dM}{dt} \right|_{s=1} \approx \frac{4}{45\pi^2} M^3(M - M_{min})^5, \quad (4.12)$$

$$-\left. \frac{dM}{dt} \right|_{s=2} \approx \frac{16}{1575\pi^2} M^5(M - M_{min})^7. \quad (4.13)$$

Поведения испарения на последних стадиях для бозонов и фермионов показано на Рис. 4.4

Исходя из соотношений (4.10) - (4.13), можно сделать вывод, что на последних стадиях испарения черной дыры с большей вероятностью будут излучаться частицы с целым спином.

## 4.5 Выводы

Представлена простейшая модель описания испарения ПЧД на последних стадиях, показывающая качественные особенности образования реликтового остатка с массой, равной  $1 \div 10^3 m_{Pl}$ . Показано, что на последних стадиях испарения ПЧД излучает больше бозонов, чем фермионов. Более реалистические модели требуют исследования решений соответствующих уравнений поля в обобщенной модели, что будет рассмотрено в главе V. Тем не менее, следует отметить, что даже в такой простой классической модели только с учетом ограничения на массу черной дыры уже можно получить остановку испарения.

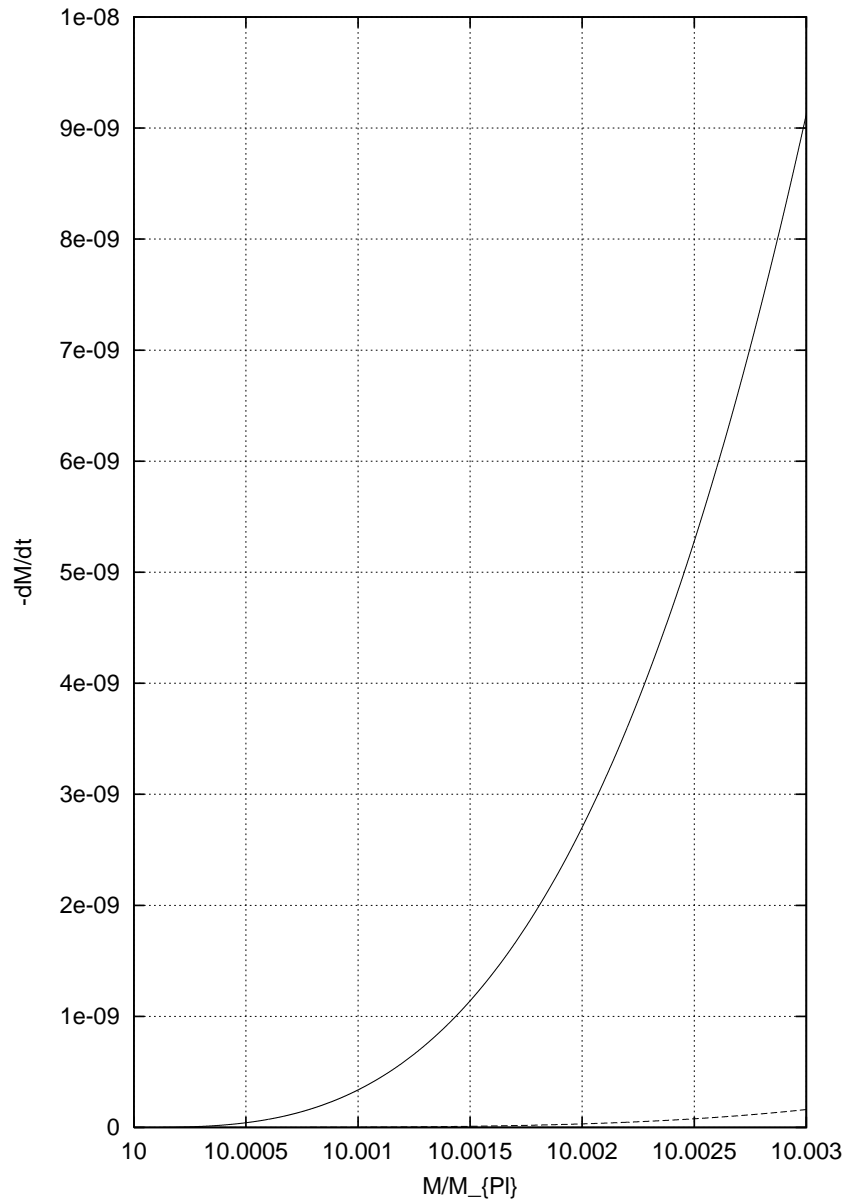


Рис. 4.4: Закон испарения черной дыры при учете закона сохранения энергии на последних стадиях, когда сильно проявляется различие в вероятности излучения частиц с различными спинами. Верхний график описывает скорость излучения бозонов, нижний — фермионов. По оси  $x$  отложена безразмерная масса (в планковских единицах), по оси  $y$  — скорость испарения черной дыры.

# Глава 5

## Полная модель испарения первичных черных дыр на последних стадиях

### 5.1 Введение

Рассматривается полная модель испарения ПЧД на последних стадиях с низкоэнергетическим эффективным струнным действием, обобщающим классическое действие Эйнштейна-Гильберта.

### 5.2 Описание модели

Для построения полной модели испарения ПЧД используем действие вида:

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ m_{Pl}^2 \left( -R + 2\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \right) + \lambda e^{-2\phi} \left( R_{ijkl} R^{ijkl} - 4R_{ij} R^{ij} + R^2 \right) \right], \quad (5.1)$$

где  $m_{Pl}$  — масса Планка,  $\lambda$  — струнная константа связи,  $\phi = \phi(r, M)$  — скалярное дилатонное поле, зависящее от радиальной координаты и массы.

Стационарная асимптотически-плоская, сферически-симметричная

метрика для удобства дальнейших вычислений берется в виде:

$$ds^2 = -\Delta(r, M)dt^2 + \frac{\sigma(r, M)^2}{\Delta(r, M)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\psi^2). \quad (5.2)$$

Функции  $\Delta(r, M)$  и  $\sigma(r, M)$  на больших расстояниях от массивного тела переходят в соответствующие шварцшильдовские метрические компоненты.

### 5.3 Аппроксимация метрических функций

Для метрических функций  $\Delta$  и  $\sigma$  и дилатонного поля  $\phi$ , в окрестности горизонта событий используем асимптотические разложения вида:

$$\begin{aligned} \Delta &= d_1(M)(r - r_h) + d_2(M)(r - r_h)^2 + \dots, \\ \sigma &= s_0(M) + s_1(M)(r - r_h) + \dots, \\ \phi &= \phi_{00}(M) + \phi_1(M)(r - r_h) + \phi_2(M)(r - r_h)^2 + \dots, \end{aligned} \quad (5.3)$$

где  $(r - r_h) \ll 1$ ,  $s_0, \phi_0 = e^{-2\phi_{00}}$  и  $r_h$  — три свободных параметра (значение  $M$  определяется размерами горизонта  $r_h$ ). Следует отметить, что полученные три свободных параметра могут быть сведены к стандартным свободным параметрам рассматриваемой модели, а именно: масса черной дыры, дилатонный заряд и значение дилатона на бесконечности.

Для метрики (5.2) учтем только члены первого порядка малости в разложении (5.3) метрических функций:

$$\Delta(M, r) = d_1(M)(r - r_h) + O(r - r_h) = d_1(r - 2M \cdot \epsilon(M)), \quad (5.4)$$

$$\sigma(M, r) = s_0(M) + O(1) = \sigma_0(M). \quad (5.5)$$

Для метрической функции  $\Delta(M, r)$  определим коэффициент  $d_1$  из следующих соображений. Так как

$$\Delta(M, r) = 1 - \frac{2M}{r} \cdot \epsilon(M) = \frac{r - 2M \cdot \epsilon(M)}{r},$$



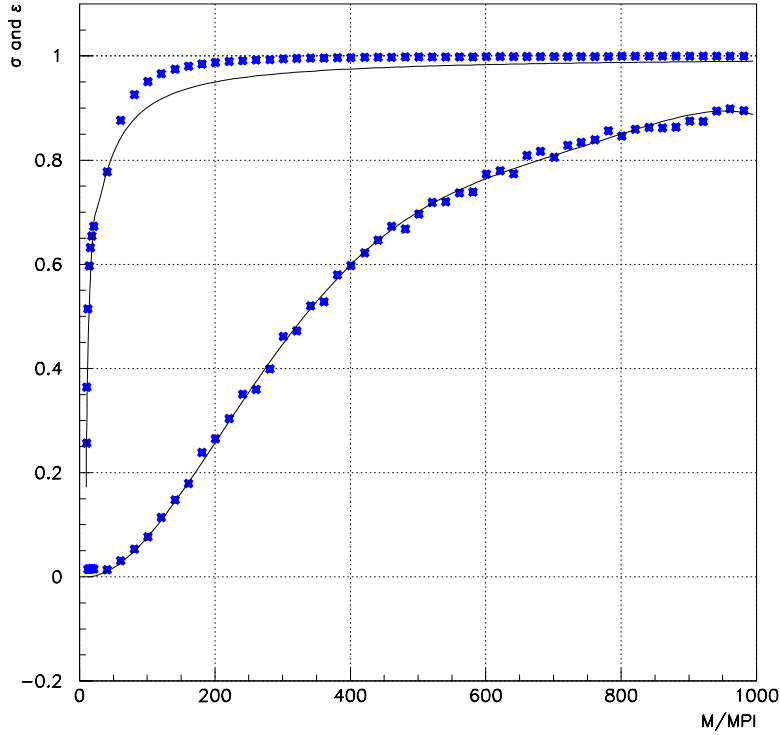


Рис. 5.1: Метрические функции  $\sigma$  и  $\epsilon$  в зависимости от массы  $M$  в планковских единицах для фиксированного значения минимальной массы  $M_{Min} = 10M_{Pl}$ . "Звездочками" обозначены численно посчитанные значения и непрерывными линиями — аппроксимационная аналитическая кривая. По оси  $x$  отложена безразмерная масса (в планковских единицах), по оси  $y$  — метрические функции.

то  $d_1 = 1/r$  и вблизи горизонта  $d_1 = 1/(2M \cdot \epsilon(M))$ .

При численном решении уравнений поля для метрики (5.2) и действия (5.1) были получены аппроксимационные выражения (фитирующие функции) для  $\epsilon(M)$  и  $\sigma_0(M)$  в виде степенных рядов специального вида по переменной  $M$ , коэффициенты которых есть численные константы (Рис. 5.1), и при фиксированном значении  $M_{min}$ , равным, для определенности, десяти планковским массам. Вообще говоря,  $M \in [10M_{Pl}, 1000M_{Pl}]$ , но случай  $M_{min} = 10M_{Pl}$  представляется наиболее интересным, так как для больших значений масс фитируемая функция  $\epsilon(M) \rightarrow 1$ .

Будем рассматривать только последние стадии испарения ПЧД, так

как на этих стадиях отличия от стандартной картины Хокинга наиболее существенны. Вблизи горизонта событий применим разложение в ряд Маклорена по  $M$  в точке  $M_{min}$  для (5.5) с точностью до 6-ого порядка малости:

$$\begin{aligned}\sigma_0(M) &= \sigma_2(M - M_{min})^2 - \sigma_3(M - M_{min})^3 \\ &+ \sigma_4(M - M_{min})^4 - \sigma_5(M - M_{min})^5,\end{aligned}$$

где соответствующие коэффициенты есть  $\sigma_2 = 0.11933 \cdot 10^{-04}$ ,  $\sigma_3 = 0.30873 \cdot 10^{-07}$ ,  $\sigma_4 = 0.30871 \cdot 10^{-10}$ ,  $\sigma_5 = 0.11051 \cdot 10^{-13}$ .

Функцию  $\epsilon(M)$  аппроксимируем следующим образом:

$$\epsilon(M) = 1 - \frac{\epsilon_1}{M} - \frac{\epsilon_2}{M^2} + \frac{\epsilon_3}{M^3} - \frac{\epsilon_4}{M^4}, \quad (5.6)$$

где соответствующие коэффициенты есть  $\epsilon_1 = 10.004$ ,  $\epsilon_2 = 13.924$ ,  $\epsilon_3 = 2856.3$ ,  $\epsilon_4 = 25375.0$ .

Используя эту технику построения аппроксимирующих полиномов заданной структуры, но с численными коэффициентами, полученными на основе численного решения полных уравнений поля, спектр испарения ПЧД и скорость потери массы могут быть представлены в аналитической форме вблизи точки  $M = M_{min}$ .

## 5.4 Спектр испарения первичной черной дыры в приближении Вентцеля-Крамера-Брилюен

В некоторых подходах черная дыра считается погруженной в температурную ванну и излучение может быть описано как приближение Вентцеля-Крамера-Брилюен (ВКБ) туннелирования в динамической геометрии [34], [35]. Это полуклассическое приближение основывается на том, что вводится промежуточное понятие между существованием классической траектории частицы в гравитационной теории и невозможностью указать траекторию частицы в квантовой теории поля, а

именно: считается, что частица обладает некоторой локализацией; частица аппроксимируется волновыми пакетами.

Энергия частицы, пересекающей горизонт событий черной дыры, меняет знак и, таким образом, пара частиц, возникшая только внутри или только снаружи горизонта может стать действительной с нулевой общей энергией после того, как один из членов пары протуннелирует на противоположную сторону. Переходы возможны только между состояниями с одной и той же полной энергией. Используя законы квантовой механики, можно выписать мнимую часть действия для испущенной из-под горизонта частицы с положительной энергией (эта частица пересекает горизонт от  $r_{in}$  до  $r_{out}$  - координат, соответствующих локализации волнового пакета частицы и зависящие от массы черной дыры, энергии испущенной частицы, а также от фитированной функции  $\epsilon(M)$ ). В приближении ВКБ мнимая часть полуклассического действия  $\Im S$  описывает вероятность туннелирования сквозь горизонт:

$$\Im S = \Im \int_{r_{in}}^{r_{out}} p_r dr = \Im \int_{r_{in}}^{r_{out}} \int_0^{p_r} dp'_r dr = \Im \int_M^{M-\omega} \int_{r_{in}}^{r_{out}} \frac{dr}{\dot{r}} dH,$$

где  $\omega$  есть энергия излучаемой частицы,  $p_r$  есть канонический момент, а  $H$  — полный гамильтониан (и полная энергия),  $\dot{r} = dH/dp_r$ .

Метрика переписана в виде, позволяющем избежать координатную сингулярность горизонта событий, для чего используются координаты Пайнлеве [34]. Переход к такой форме метрики от шварцшильдовской можно осуществить путем замены переменной времени:

$$t = t_{old} + r \sqrt{\frac{\sigma^2}{\Delta^2} - \frac{1}{\Delta}}.$$

Подставляя  $t_{old}$  в (5.2) получаем

$$ds^2 = -\Delta dt^2 + 2\sqrt{\sigma^2 - \Delta} dr dt + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\psi^2). \quad (5.7)$$

Для ПЧД в рассматриваемой модели радиальные геодезические описываются следующим уравнением [45]:

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\tau} = \frac{\Delta}{\sqrt{\sigma^2 - \Delta} \mp \sigma} = \mp \sigma - \sqrt{\sigma^2 - \Delta}. \quad (5.8)$$

В шварцшильдовском приближении выражение (5.8) переходит в следующий стандартный вид:

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\tau} = \pm 1 - \sqrt{\frac{2M}{r}}. \quad (5.9)$$

После подстановки выражения (5.8) в уравнение для мнимой части действия и учитывая равенство  $H = M - \omega'$  получаем:

$$\Im S = -\Im \int_0^\omega \int_{2M\epsilon(M)}^{2(M-\omega)\epsilon(M)} \frac{dr d\omega'}{\sigma - \sqrt{\sigma^2 - \Delta}}. \quad (5.10)$$

Последнее уравнение с учетом аппроксимации метрической функции  $\Delta(M, r)$  и  $\sigma(M, r)$  выражениями (5.4) и (5.5) принимает вид:

$$\Im S = -\Im \int_0^\omega d\omega' \left( \int_{2M\epsilon(M)}^{2(M-\omega')\epsilon(M)} \frac{dr}{\sigma_0(M) - \sqrt{\sigma_0(M)^2 - \frac{r}{2(M-\omega')\epsilon(M)} + 1}} \right)$$

Вводя для удобства дальнейших вычислений новую переменную  $y$ :

$$y = \sqrt{\sigma_0(M)^2 - \frac{r}{2(M-\omega)\epsilon(M)} + 1}.$$

получим  $\Im S$  в виде

$$\begin{aligned} \Im S &= -\Im \int_0^\omega d\omega' \left( \int_{\sqrt{\sigma_0(M)^2 - \frac{\omega'}{M-\omega'}}}^{\sigma_0(M)} \frac{4(M-\omega') \cdot \epsilon(M) \cdot y dy}{y - \sigma_0(M)} \right) \\ &= -\Im \int_0^\omega d\omega' \left( 4(M-\omega')\epsilon(M)\sigma_0(M) \int_{\sqrt{\sigma_0(M)^2 - \frac{\omega'}{M-\omega'}}}^{\sigma_0(M)} \frac{dy}{y - \sigma_0(M)} \right). \end{aligned}$$

Рассмотрим более подробно интеграл

$$I = \Im \int_{\sqrt{\sigma_0(M)^2 - \frac{\omega'}{M-\omega'}}}^{\sigma_0(M)} \frac{dy}{y - \sigma_0(M)}$$

Взятие этого интеграла эквивалентно взятию интеграла вида:

$$I = \Im \int_{\xi_1 - \delta}^{\xi_2 + \delta} \frac{dx}{x - \xi_2},$$

где  $\xi_1 < \xi_2$  и  $\delta$  есть малая деформация контура интегрирования, вводимая для того, чтобы в дальнейших вычислениях в стандартной процедуре перехода к комплексным переменным, избежать особенности на контуре интегрирования.

Для взятия интеграла вида

$$I = \Im \int_{(\xi_1 - \xi_2) - \delta}^{\delta} \frac{dx}{x},$$

имеющего особенность в нуле, перейдем к комплексным переменным  $z = x + iy$  и вычислим этот определенный интеграл с помощью теории вычетов путем специального выбора пути обхода особой точки  $(0,0)$ .

В дальнейшем нас будет интересовать только мнимая часть исследуемого интеграла, поэтому без ограничения общности заменим его на интеграл:

$$I = \Im \int_{-\delta}^{\delta} \frac{dx}{x}, \quad (5.11)$$

$$\text{так как } I = \Im \int_{(\xi_1 - \xi_2) - \delta}^{-\delta} \frac{dx}{x} = 0.$$

Подынтегральная функция в выражении (5.11) есть голоморфная всюду в верхней полуплоскости, кроме точки  $(0, 0 + i\rho)$ , где  $\rho$  есть малая деформация контура  $(-\delta, \delta)$ ,  $C_+$  (без ограничения общности положим  $\rho < \delta/2$ ). Деформированный контур  $(-\delta, -\rho)$ ,  $I$ ,  $C_-$ ,  $II$ ,  $(\rho, \delta)$ ,  $C_+$ , ( $I$ ,  $C_-$ ,  $II$  - обход особой точки) особых точек уже не содержит, следовательно,

$$\int_{-\delta}^{-\rho} \frac{dx}{x} + \int_I \frac{idy}{iy} + \int_{C_-} \frac{dz}{z} + \int_{II} \frac{idy}{iy} + \int_{\rho}^{\delta} \frac{dx}{x} + \int_{C_+} \frac{dz}{z} = 0,$$

$$\int_{-\delta}^{-\rho} \frac{dx}{x} + \int_{\rho}^{\delta} \frac{dx}{x} = v.p. \int_{-\delta}^{\delta} \frac{dx}{x - i\rho},$$

$$\int_I \frac{idy}{iy} = - \int_{II} \frac{idy}{iy}.$$

Переходя к полярным координатам  $z = re^{i\phi}$ ,  $dz = ire^{i\phi}d\phi$

$$\oint_{C_-} \frac{dz}{z} = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} id\phi = -2i\pi,$$

$$\oint_{C_+} \frac{dz}{z} = \int_0^{\pi} id\phi = i\pi,$$

получаем

$$v.p. \int_{-\delta}^{\delta} \frac{dx}{x - i\rho} = i\pi.$$

Таким образом, мнимая часть действия определяется выражением:

$$\Im S = - \int_0^{\omega} d\omega' (4(M - \omega')\epsilon(M)\sigma_0(M)\pi).$$

Подставляя в предыдущее выражение фиты (5.6) и (5.6), окончательно получаем вероятность туннелирования сквозь горизонт в полной модели:

$$2\Im S = \frac{840\pi}{M^2(M - \omega)^2} \cdot \alpha,$$

где функция  $\alpha$  в силу ее громоздкости приведена в Приложениях (Приложение 2 ( $\alpha$ )).

Функция  $\alpha$  зависит от  $M$  и  $M_{min}$ . В виду ее сложности для дальнейшего использования, а также учитывая тот факт, что мы исследуем вклад высших поправок по кривизне, которые становятся значимыми только на последних стадиях испарения, то есть для  $M$  близких к  $M_{min}$ , предел  $M - M_{min} \ll 1$  может быть учтен в вычислениях. Учет высших поправок приводит к тому, что спектр излучения существенным образом отличается от стандартной картины Хокинга, согласно которой  $-dM/dt \propto 1/M^2$ . Важно отметить следующее соотношение между массой ПЧД и энергией излученной частицы, а именно: принимая во внимание закон сохранения энергии, значение  $\omega$  должно быть ограничено:  $0 \leq \omega \leq M - M_{min}$ . Аппроксимированное выражение для мнимой части действия  $\Im S(M, \omega)$  для фиксированного для удобства

вычислений  $M_{min}$  может быть использовано в виде:

$$\Im S = k * (M - M_{min})^3, \quad (5.12)$$

где численная константа  $k = 5 \cdot 10^{-4}$  представлена в планковских единицах. Точность такой аппроксимации лучше 0.5% (Рис. 5.2).

## 5.5 Сохранение энергии и скорость потери массы

Спектр излучения на степень свободы в простейшей форме записывается как [34]:

$$\frac{d^2 N}{dE dt} = \frac{\Gamma_s}{2\pi\hbar} \cdot \frac{\Theta((M - M_{min})c^2 - E)}{e^{\Im S} - (-1)^{2s}}, \quad (5.13)$$

где вероятность поглощения частицы спина  $s$   $\Gamma_s(M, E)$ , и ступенчатая функция  $\Theta(M, E)$  введена для того, чтобы учесть закон сохранения энергии с минимальной массой  $M_{min}$ . Здесь и далее используются стандартные единицы вместо планковских для того, чтобы оценить численные результаты для экспериментальных работ. Возникает два вопроса: поля какого типа излучаются (и какую функцию  $\Gamma_s$  нужно использовать) и какой разброс масс является физически интересным. Для ответа необходимо скорость потери массы записать в виде

$$-\frac{dM}{dt} = \int_0^{(M - M_{min})c^2} \frac{d^2 N}{dE dt} \cdot \frac{E}{c^2} dE \quad (5.14)$$

где интегрирование проходит до  $(M - M_{min})c^2$  для того, чтобы обеспечить условие запрета перехода ниже  $M_{min}$ .

Вероятности поглощения могут быть легко получены как предел  $GME/\hbar c^3 \ll 1$  как мы определяем конечную точку испарения, когда обрыв, обусловленный  $M_{min}$  препятствует тому, что черная дыра излучает частицы с энергиями порядка  $kT$ .

Используя аналитическую формулу [91]-[92], [95] и разлагая  $\exp(\Im S)$  в ряд до первого порядка, используя аппроксимацию согласно (5.12),

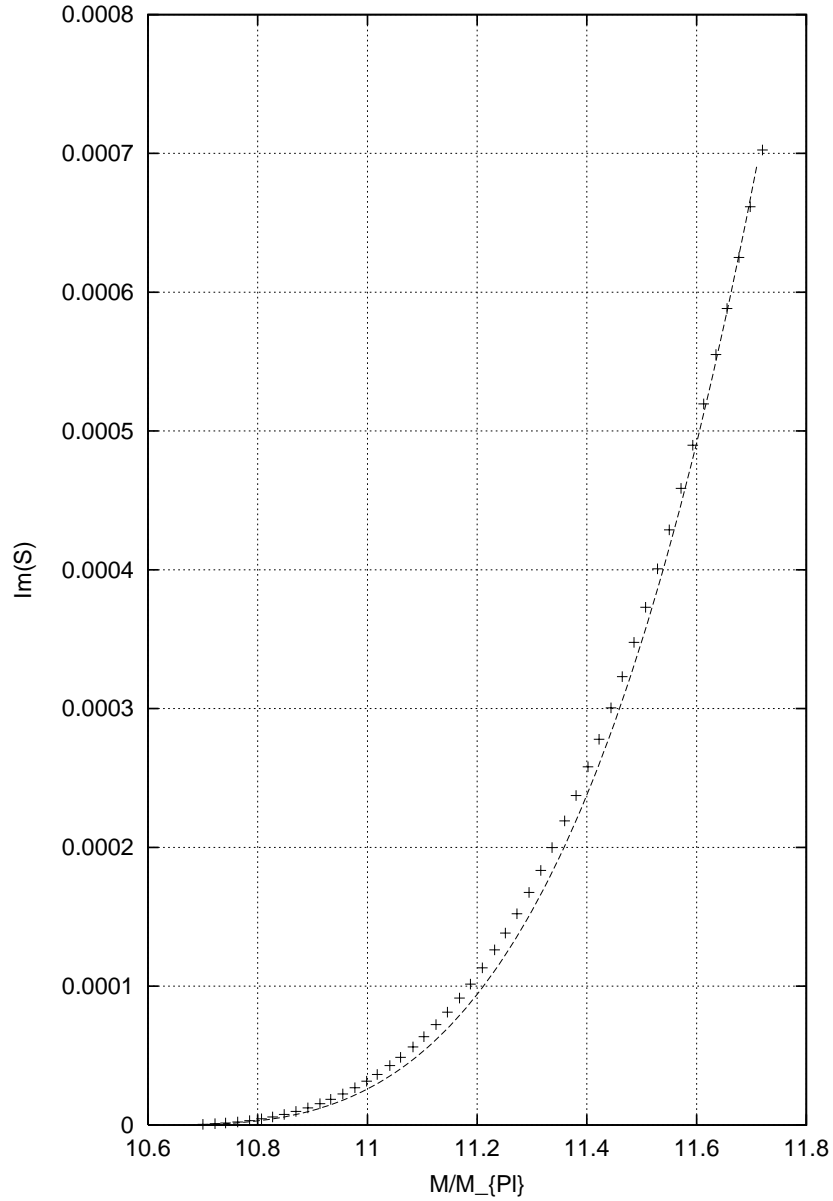


Рис. 5.2: Мнимая часть действия  $\Im S$  (точки) и его аппроксимация  $(5 \cdot 10^{-4}) \cdot (M - M_{min})^3$  (пунктирная линия) в зависимости от массы черной дыры  $M$  во время последних стадий испарения для  $M_{min} = 10.6 M_{Pl}$ . Необходимо заметить, что во время последних стадий испарения излученная энергия  $\omega < M - M_{min} \ll 1$ . Для фиксированных значений  $\omega = \omega_i^*$  в окрестности  $M_{min}$  ( $O(M_{min}) = 0.01$ ) масса  $M \in (M_{min} + \omega_i^*, M_{min} + \omega_i^* + O(M_{min}))$ . Таким образом, для различных значений  $\omega^*$  ( $\omega_{i+1}^* = \omega_i^* + O(M_{min}), \omega_1^* = 0.1, i \in N$ )  $M$ , принадлежащих различным непересекающимся интервалам. Окончательно,  $\Im S$  представляет собой объединение таких интервалов для наиболее вероятных значений  $\omega_i^* \in (0.1, 1.1)$ . По оси  $x$  отложена безразмерная масса в планковских единицах, по оси  $y$  — мнимая часть эффективного действия.



легко видно, что излучение частиц спина 1 (на степень свободы)

$$-\frac{dM}{dt} \approx \frac{16 G^4 m_{Pl}}{9\pi \hbar^5 c^2 k} M^4 (M - M_{min})^3 \quad (5.15)$$

доминирует над излучением частиц спина  $s=1/2$  и  $s=2$ .

Интересно отметить, что излучение фермионов вблизи  $M_{min}$  не сильно меняется рассматриваемой моделью, так, в нижнем порядке,  $\exp(\Im S) - (-1)^{2s} \approx 2$ .

Если ограничиться рассмотрением безмассовых частиц, то есть, если излучатся частицы только этого сорта, когда  $M$  очень близко к  $M_{min}$ , то модификация метрики меняет природу излучения в конечной точке с нейтрино на фотоны.

С этим выражением  $-dM/dt = f(M)$ , можно посчитать массу  $M$  в любой выбранный момент времени  $t$  после образования от массы  $M_{init}$  как:

$$t = \int_M^{M_{init}} \frac{dM}{f(M)} \approx \frac{9\pi k \hbar^5 c^2}{32 G^4 m_{Pl}^3} \times \frac{1}{M_{min}^4 (M - M_{min})^2} \quad (5.16)$$

где только доминирующий член в пределе  $t \rightarrow \infty$  берется из аналитического представления функции. Как ожидается, результат не зависит от  $M_{init}$ , что следует из того факта, что время, нужное для того, чтобы доэволюционировать от  $M_{init}$  до нескольких  $M_{min}$  много меньше, чем время, необходимое для того, чтобы доэволюционировать от нескольких  $M_{min}$  до  $M$  так долго как  $M_{init} \ll 10^{15}$  г для  $t \approx 10^{17}$  сек. Ко времени  $t$  после образования, масса берется в виде:

$$M \approx M_{min} + \sqrt{\frac{9k\pi\hbar^5 c^2}{8M_{min}^4 G^4 m_{Pl}^3 t}} \quad (5.17)$$

Это условие на массу может быть выполнено в формуле для спектра излучения

$$\frac{d^2 N}{dEdt} \approx \frac{32}{3\pi} \left(\frac{8}{9\pi}\right)^{\frac{3}{2}} G^{10} \hbar^{-\frac{25}{2}} c^{-15} m_{Pl}^{\frac{15}{2}} M_{min}^{10} k^{-\frac{5}{2}} \times t^{\frac{3}{2}} E^4 \Theta \left( \sqrt{\frac{9k\pi\hbar^5 c^6}{8M_{min}^4 G^4 m_{Pl}^3 t}} - E \right) \quad (5.18)$$

приводя к тому, что частота  $f$

$$f = \int_0^{(M-M_{min})c^2} \frac{d^2 N}{dE dt} dE \approx \frac{36}{15} \cdot \frac{1}{t}. \quad (5.19)$$

Если мы хотим изучить возможное первичное излучение в настоящий момент от ПЧД, образованных в ранней Вселенной и имевших тогда малые массы, то это приводит к типичным энергиями порядка  $1.8 \cdot 10^{-6}$  эВ. Это излучение очень слабое, оно совпадает с испарением фотонов с длиной волны много больше, чем радиус черной дыры. Это подчеркивает тот факт, что спектр есть монотонно возрастающая функция энергии, возрастающая до "отсечения", с поведением  $E^4$ . Хотя испарение обладает очень малой интенсивностью, оно никогда не останавливается и приводит к эволюции массы  $1/\sqrt{t}$ .

## 5.6 Поиск экспериментальных следствий

В этом разделе изучается возможность измерения полученного излучения ПЧД. Пусть  $R$  — расстояние от наблюдателя,  $z$  — красное смещение, соответствующее этому расстоянию,  $\theta$  — угол детектора,  $d^2 N/dE dt(E, t)$  — дифференциальный спектр единичного реликтового остатка черной дыры в момент времени  $t$ ,  $\rho(R)$  — численная плотность таких остатков, с учетом вариаций фактора космической шкалы,  $R_{max}$  — размер горизонта в некотором энергетическом масштабе,  $t_{univ}$  — возраст Вселенной и  $H$  — параметр Хаббла. "Экспериментальный" спектр  $F$  (Дж $^{-1}$ ·сек $^{-1}$ ·страд $^{-1}$ ):

$$F = \int_0^{R_{max}} \frac{d^2 N}{dE dt} \left( E(1+z), t_{univ} - \frac{R}{c} \right) \times \frac{\rho(R) \cdot \pi R^2 \tan^2(\theta)}{4\pi R^2} dR \quad (5.20)$$

что приводит к:

$$F = \tan^2(\theta) \frac{8}{3\pi} \left( \frac{8}{9\pi} \right)^{\frac{3}{2}} G^{10} \hbar^{-\frac{25}{2}} c^{-15} m_{Pl}^{\frac{15}{2}} M_{min}^{10}$$

$$\begin{aligned}
& \times k^{-\frac{5}{2}} E^4 \int_0^{R_{max}} \rho(R) \left( \frac{1 + \frac{HR}{c}}{1 - \frac{HR}{c}} \right)^2 \left( t_{univ} - \frac{R}{c} \right)^{\frac{3}{2}} \\
& \times \Theta \left( \sqrt{\frac{9k\pi\hbar^5 c^6}{8M_{min}^4 G^4 m_{Pl}^3 (t - \frac{R}{c})}} - E \sqrt{\frac{1 + \frac{HR}{c}}{1 - \frac{HR}{c}}} \right) dR
\end{aligned} \tag{5.21}$$

Этот интеграл может быть посчитан аналитически, принимая во внимание, что реликтовые остатки первичных черных дыр, которые находятся далеко от Земли, должны рассматриваться на более ранних стадиях развития и их энергия должна подчиняться закону красного смещения. Даже предполагая наиболее высокую возможную плотность таких остатков ( $\Omega_{BHR} = \Omega_{CDM} \approx 0.3$ ) и  $R_{max}$  порядка радиуса Вселенной, получим очень малое результирующее излучение:  $F \approx 1.1 \cdot 10^7 \text{ Дж}^{-1} \text{ сек}^{-1} \text{ м}^{-2} \text{ страд}^{-1}$  около  $10^{-6}$  эВ, что значительно ниже фонового излучения. Это делает проблематичным ответ на вопрос о возможном непосредственном детектировании излучения реликтовых остатков первичных черных дыр.

Другой способ изучить различия между излучением частиц черными дырами в рассматриваемой модели и стандартным хокинговским спектром — это рассмотреть область масс, где  $dM/dt$  максимально. Учитывая, что скорость убывания массы становится много больше в рассматриваемой модели чем в модели Хокинга, можно ожидать, что экстремально высокая энергия излучения будет сильно возрастать. В частности, это может оживить интерес к реликтовым остаткам первичных черных дыр как к кандидатам на решение загадки измеряемого космического излучения сверхвысоких энергий (эффект Грейзена-Зацепина-Кузьмина) [115].

Модификация спектра становится важной только когда масса очень близка к  $M_{min}$ . В зависимости от реальной численной величины  $M_{min}$ , спектр может существенно меняться (увеличение с увеличением  $M_{min}$ ), но масса остается больше  $M_{min}$  на несколько планковских масс. Это

слишком мало для подсчета значимого увеличения излучения. Число частиц, излученных с энергией, больше, чем  $10^{20}$  эВ в стандартной Хокинговской модели есть число, порядка  $10^{15}$ . Это значение нужно брать аккуратно, так как при высоких энергиях возможно изменение спектра излучения и за счет эффектов квантовой хромодинамики (излучение не только электронов и фотонов, но и кварков-антикварков).

С другой стороны, даже если доступна вся энергия (в момент, когда модификации классической модели становятся значимыми), и энергия частиц достигает  $10^{20}$  эВ (что не реально), может генерироваться только  $10^9$  частиц и отличаться меньше чем 0.01 от чистого излучения Хокинга. Это не приводит к генерации, как ожидается, спектра больше  $E^{-3}$ .

## 5.7 Первичные черные дыры как кандидаты в темную материю

Во Вселенной Фридмана без инфляции остатки планковской массы могут иметь плотность, близкую к критической [46]-[50]. Однако, это изучение основывалось на ненаблюдаемых предположениях, что, или устойчивый объект формируется с массой, близкой к массе Планка, или остается голая сингулярность пространства-времени. Наши исследования предлагают новые аргументы в пользу существования массивных реликтовых остатков первичных черных дыр, возможно, на один порядок больше планковского размера. Важная проблема — большой горизонт на конец инфляции. Стандартный механизм образования реликтовых остатков первичных черных дыр требует, чтобы масса черной дыры была порядка массы горизонта во время образования и только они, созданные после инфляции, могли быть приняты в расчет так как огромное увеличение масштабного фактора очень ”разрядит” все, что сформировалось до того. При этих предположениях плотность релик-

ТОВЫХ ОСТАТКОВ ОЧЕНЬ МАЛЫ:

$$\Omega_{Pl} = \Omega_{PBH} \frac{\alpha - 2}{\alpha - 1} M_H^{1-\alpha} M_*^{\alpha-2} M_{min} \quad (5.22)$$

где  $\Omega_{PBH}$  есть плотность еще не испарившихся реликтовых остатков,  $\alpha$  есть спектральный индекс начального спектра масс (равный  $5/2$  в стандартной модели для радиационно-доминированной Вселенной),  $M_*$  — начальная масса первичной черной дыры, время испарения которой равно возрасту Вселенной (приблизительно  $5 \cdot 10^{14}$  г) и  $M_H$  — масса горизонта на конец инфляции. Эта масса может быть записана как

$$M_H = \gamma^{\frac{1}{2}} \frac{1}{8} \frac{m_{Pl}}{t_{Pl}} t_i \approx \gamma^{\frac{1}{2}} \frac{1}{8} \frac{m_{Pl}}{t_{Pl}} \frac{0.24}{T_{RH}^2} \quad (5.23)$$

где  $T_i$  время образования и  $T_{RH}$  — температура разогрева (reheating) в МэВ. Даже для наибольшего возможного значения  $T_{RH}$ , около  $10^{12}$  ГэВ, если температура разогрева больше  $10^9$  ГэВ, реликтовые остатки первичных черных дыр могли бы существовать в настоящий момент времени и верхняя граница на  $\Omega_{PBH}$ , следующая из гамма-лучей, около  $6 \cdot 10^{-9}$  результирующая плотность очень мала:  $\Omega_{Pl} \approx 10^{-16}$ .

Есть, тем не менее, по крайней мере два различных пути для привлечения интереса к проблеме реликтовых остатков первичных черных дыр как кандидатов в темную материю. Первый связан с тем, что реликты могли быть получены из достаточно быстрого уменьшения начального спектра масс, так чтобы превысить границу гамма-излучения. Второй предполагает наличие большого количества больших первичных черных дыр, между  $10^{15}$  г и  $10^{25}$  г, где эксперименты совершенно не возможны: такие черные дыры слишком тяжелы, чтобы испарение Хокинга было для них существенным, и слишком легкие, чтобы быть обнаруженными при микролинзировании [116]. Наиболее естественный способ образования спектра при таких условиях — инфляционные модели со шкалой, соответствующей как изменению спектрального индекса энергетического спектра флуктуаций [117], так и соответствующей шагу [118].

## 5.8 Выводы

Решение типа "черная дыра", полученное в рамках обобщенной модели Эйнштейна-Гильберта, а именно в четырехмерной струнной гравитации с дополнительным скалярным полем и высшими поправками по кривизне, может быть применено к исследованию реликтовых остатков ПЧД, сформировавшихся в ранней Вселенной за счет флуктуаций плотности. В рамках предложенной модели доказана устойчивость реликтовых остатков ПЧД во всех особых точках, исследована связь этих объектов с параметрами стандартной космологической модели, а также построены модели испарения ПЧД. Простейшая модель испарения учитывает лишь основной, но фундаментальный результат квазиклассической гравитации, а именно наличие ограничения снизу на минимально возможную массу ПЧД. Полная модель испарения оперирует с полевыми уравнениями, и закон испарения получается на основе их "полуаналитических" (асимптотические разложения с численными коэффициентами) решений. Классический закон хокинговского излучения существенно модифицируется на планковских масштабах в рамках предложенной модели.

Прямые экспериментальные поиски продуктов излучения реликтовых остатков ПЧД невозможны, что дает возможность рассматривать реликтовые остатки ПЧД одними из кандидатов в холодную темную материю в нашей Вселенной.

# Заключение

В предлагаемой работе впервые сделана попытка найти наблюдательные следствия струнной гравитации. Теория струн, способная описывать процессы, происходившие в ранней Вселенной при высоких энергиях, предоставляет уникальный естественный механизм для описания первичных черных дыр. Эти объекты, образованные из повышенного контраста плотности в постинфляционную эпоху, предсказываются в рамках стандартной космологической модели.

В рамках четырехмерной струнной гравитации, в обобщенной модели Эйнштейна-Гильберта с двухпетлевой поправкой по кривизне и дилатонным скалярным полем получена полная непротиворечивая модель первичных черных дыр, а именно:

1. с помощью асимптотических разложений доказана устойчивость окрестности сферической детерминантной сингулярности, являющейся причиной наличия ограничения на минимальную массу первичной черной дыры, откуда следует вывод об устойчивости относительно малых временных возмущений и об эволюции во времени реликтовых остатков первичных черных дыр;
2. найдена связь параметров стандартной космологической модели ранней Вселенной с первичными черными дырами. А именно, исследована связь температуры Вселенной на стадии разогрева (reheating) с массой первичной черной дыры на этой стадии и выяснены условия, при которых реликтовые остатки первичных черных дыр успевают образоваться (то есть, "испарение" остано-

вливается) к настоящему моменту времени согласно стандартной космологической модели;

3. построена модель испарения первичной черной дыры, основанная на аналитических и численных решениях полевых уравнений в обобщенной модели Эйнштейна-Гильберта. Показано, что на последних стадиях испарения в области, где становятся значимыми высшие поправки по кривизне, стандартный закон испарения Хокинга модифицируется, что приводит к остановке испарения и к образованию реликтовых остатков первичных черных дыр;
4. проанализирована возможность прямых экспериментальных поисков продуктов излучения на последних стадиях первичных черных дыр. Показано, что, даже предполагая наиболее высокую возможную концентрацию реликтовых остатков первичных черных дыр, результирующее излучение окажется чрезвычайно малым, что закрывает вопрос о возможном непосредственном детектировании реликтовых остатков первичных черных дыр;
5. показано, что для некоторой области возможных масс первичных черных дыр, их излучение может давать вклад в космические лучи сверхвысоких энергий (эффект Грейзена-Зацепина-Кузьмина);
6. на основе построенной полной законченной теоретической модели первичных черных дыр, их устойчивости во времени, предполагается вклад этих объектов в темную материю в нашей Вселенной.



# Положения, выносимые на защиту

На защиту выносятся следующие положения:

1. доказано, что реликтовые остатки первичных черных дыр являются объектами, устойчивыми относительно малых временных возмущений;
2. получена связь температуры Вселенной на стадии разогрева (reheating) с массой первичной черной дыры на этой стадии, а также условия, при которых реликтовые остатки первичных черных дыр успевают образоваться к настоящему моменту времени;
3. построена модель испарения первичной черной дыры в рамках четырехмерной струнной гравитации, в обобщенной модели Эйнштейна-Гильберта с двухпетлевой поправкой по кривизне и дилатонным скалярным полем;
4. проанализирована возможность прямых экспериментальных поисков продуктов излучения первичных черных дыр.

# Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своим научным руководителям Михаилу Васильевичу Сажину и Станиславу Олеговичу Алексееву за неоценимую помощь и важные замечания в процессе работы над диссертацией, И.А. Герасимову и А.А. Старобинскому за полезные советы по диссертации, а также В.Л. Пантелееву, коллективу кафедры небесной механики, астрометрии и гравиметрии и отделу релятивистской астрофизики ГАИШ МГУ за участие и поддержку за все время учебы в аспирантуре.

# Приложения

## Приложение 1

Характеристическое уравнение на собственные значения и его решение:

$$\begin{aligned}
 0 = & \frac{\left( \frac{A_{35}}{B_{31}} - \frac{A_{45}}{B_{41}} - \frac{\left( \frac{C_{33}}{B_{31}} - \frac{C_{43}}{B_{41}} - \frac{C_{44}}{B_{41}} + \frac{C_{34}}{B_{31}} - \frac{B_{44}}{B_{41}} + \frac{B_{34}}{B_{31}} + \frac{B_{33}}{B_{31}} - \frac{B_{43}}{B_{41}} \right) A_{15}}{B_{13} + C_{13} + C_{14}} \right) A_{15}}{B_{31}} - \frac{A_{45}}{B_{41}} - \frac{\left( \frac{C_{33}}{B_{31}} - \frac{C_{43}}{B_{41}} - \frac{C_{44}}{B_{41}} + \frac{C_{34}}{B_{31}} - \frac{B_{44}}{B_{41}} + \frac{B_{34}}{B_{31}} + \frac{B_{33}}{B_{31}} - \frac{B_{43}}{B_{41}} \right) A_{11}}{B_{13} + C_{13} + C_{14}} \right) y^2 \\
 & + \frac{\left( \frac{A_{34}}{B_{31}} - \frac{A_{44}}{B_{41}} - \frac{\left( \frac{C_{33}}{B_{31}} - \frac{C_{43}}{B_{41}} - \frac{C_{44}}{B_{41}} + \frac{C_{34}}{B_{31}} - \frac{B_{44}}{B_{41}} + \frac{B_{34}}{B_{31}} + \frac{B_{33}}{B_{31}} - \frac{B_{43}}{B_{41}} \right) A_{14}}{B_{13} + C_{13} + C_{14}} \right) A_{14}}{B_{31}} - \frac{A_{44}}{B_{41}} - \frac{\left( \frac{C_{33}}{B_{31}} - \frac{C_{43}}{B_{41}} - \frac{C_{44}}{B_{41}} + \frac{C_{34}}{B_{31}} - \frac{B_{44}}{B_{41}} + \frac{B_{34}}{B_{31}} + \frac{B_{33}}{B_{31}} - \frac{B_{43}}{B_{41}} \right) A_{11}}{B_{13} + C_{13} + C_{14}} \right) y \\
 & + \frac{\left( \frac{A_{33}}{B_{31}} - \frac{A_{43}}{B_{41}} - \frac{\left( \frac{C_{33}}{B_{31}} - \frac{C_{43}}{B_{41}} - \frac{C_{44}}{B_{41}} + \frac{C_{34}}{B_{31}} - \frac{B_{44}}{B_{41}} + \frac{B_{34}}{B_{31}} + \frac{B_{33}}{B_{31}} - \frac{B_{43}}{B_{41}} \right) A_{13}}{B_{13} + C_{13} + C_{14}} \right) A_{13}}{B_{31}} - \frac{A_{43}}{B_{41}} - \frac{\left( \frac{C_{33}}{B_{31}} - \frac{C_{43}}{B_{41}} - \frac{C_{44}}{B_{41}} + \frac{C_{34}}{B_{31}} - \frac{B_{44}}{B_{41}} + \frac{B_{34}}{B_{31}} + \frac{B_{33}}{B_{31}} - \frac{B_{43}}{B_{41}} \right) A_{11}}{B_{13} + C_{13} + C_{14}} \right) y
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lambda_{1,2} = & -\frac{1}{2} \left( -A_{34} B_{41} B_{13} - A_{34} B_{41} C_{13} - A_{34} B_{41} C_{14} + A_{44} B_{31} B_{13} \right. \\
 & + A_{44} B_{31} C_{13} + A_{44} B_{31} C_{14} + A_{14} C_{33} B_{41} - A_{14} C_{43} B_{31} \\
 & - A_{14} C_{44} B_{31} + A_{14} C_{34} B_{41} - A_{14} B_{44} B_{31} + A_{14} B_{34} B_{41} \\
 & + A_{14} B_{33} B_{41} - A_{14} B_{43} B_{31} \pm (A_{14}^2 C_{34}^2 B_{41}^2 \\
 & + A_{14}^2 B_{34}^2 B_{41}^2 + A_{44}^2 B_{31}^2 B_{13}^2 + A_{14}^2 B_{44}^2 B_{31}^2 \\
 & + A_{44}^2 B_{31}^2 C_{14}^2 + A_{14}^2 C_{33}^2 B_{41}^2 - 2 A_{34} B_{41} B_{13}^2 A_{44} B_{31} \\
 & \left. + 2 A_{34}^2 B_{41}^2 B_{13} C_{13} + 2 A_{34}^2 B_{41}^2 B_{13} C_{14} - 4 A_{34} B_{41} B_{13} A_{44} B_{31} C_{13} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 4 A_{34} B_{41} B_{13} A_{44} B_{31} C_{14} - 2 A_{34} B_{41}^2 B_{13} A_{14} C_{33} \\
& + 2 A_{34} B_{41} B_{13} A_{14} C_{43} B_{31} + 2 A_{34} B_{41} B_{13} A_{14} C_{44} B_{31} \\
& - 2 A_{34} B_{41}^2 B_{13} A_{14} C_{34} + 2 A_{34} B_{41} B_{13} A_{14} B_{44} B_{31} \\
& - 2 A_{34} B_{41}^2 B_{13} A_{14} B_{34} - 2 A_{34} B_{41}^2 B_{13} A_{14} B_{33} \\
& + 2 A_{34} B_{41} B_{13} A_{14} B_{43} B_{31} + 2 A_{34}^2 B_{41}^2 C_{13} C_{14} \\
& - 2 A_{34} B_{41} C_{13}^2 A_{44} B_{31} - 4 A_{34} B_{41} C_{13} A_{44} B_{31} C_{14} \\
& - 2 A_{34} B_{41}^2 C_{13} A_{14} C_{33} + 2 A_{34} B_{41} C_{13} A_{14} C_{43} B_{31} \\
& + 2 A_{34} B_{41} C_{13} A_{14} C_{44} B_{31} - 2 A_{34} B_{41}^2 C_{13} A_{14} C_{34} \\
& - 2 A_{34} B_{41}^2 C_{13} A_{14} B_{34} + 4 A_{35} B_{41}^2 B_{13} A_{13} B_{34} \\
& - 4 A_{35} B_{41}^2 B_{13}^2 A_{33} - 8 A_{35} B_{41}^2 B_{13} A_{33} C_{14} \\
& + 4 A_{35} B_{41} B_{13}^2 A_{43} B_{31} + 8 A_{35} B_{41} B_{13} A_{43} B_{31} C_{13} \\
& + 8 A_{35} B_{41} B_{13} A_{43} B_{31} C_{14} + 4 A_{35} B_{41}^2 B_{13} A_{13} C_{33} \\
& - 4 A_{35} B_{41} B_{13} A_{13} C_{43} B_{31} - 4 A_{35} B_{41} B_{13} A_{13} C_{44} B_{31} \\
& - 4 A_{35} B_{41} B_{13} A_{13} B_{44} B_{31} + 4 A_{35} B_{41}^2 B_{13} A_{13} B_{33} \\
& - 4 A_{35} B_{41} B_{13} A_{13} B_{43} B_{31} + 4 A_{35} B_{41}^2 B_{13} A_{13} C_{34} \\
& - 8 A_{35} B_{41}^2 B_{13} A_{33} C_{13} + 2 A_{34} B_{41} C_{13} A_{14} B_{44} B_{31} \\
& + 2 A_{14}^2 B_{34} B_{41}^2 B_{33} - 2 A_{14}^2 B_{34} B_{41} B_{43} B_{31} \\
& - 2 A_{14}^2 B_{33} B_{41} B_{43} B_{31} + 4 A_{35} B_{41}^2 C_{13} A_{13} B_{34} \\
& - 8 A_{35} B_{41}^2 C_{13} A_{33} C_{14} + 4 A_{35} B_{41} C_{13}^2 A_{43} B_{31} \\
& + 8 A_{35} B_{41} C_{13} A_{43} B_{31} C_{14} + 4 A_{35} B_{41}^2 C_{13} A_{13} C_{33} \\
& - 4 A_{35} B_{41} C_{13} A_{13} C_{43} B_{31} - 4 A_{35} B_{41} C_{13} A_{13} C_{44} B_{31} \\
& - 4 A_{35} B_{41} C_{13} A_{13} B_{44} B_{31} + 4 A_{35} B_{41}^2 C_{13} A_{13} B_{33} \\
& - 4 A_{35} B_{41} C_{13} A_{13} B_{43} B_{31} + 4 A_{35} B_{41}^2 C_{13} A_{13} C_{34} \\
& - 4 A_{35} B_{41}^2 C_{13}^2 A_{33} + 4 A_{35} B_{41}^2 C_{14} A_{13} B_{34} \\
& - 4 A_{35} B_{41}^2 C_{14}^2 A_{33} + 4 A_{35} B_{41} C_{14}^2 A_{43} B_{31} \\
& + 4 A_{35} B_{41}^2 C_{14} A_{13} C_{33} - 4 A_{35} B_{41} C_{14} A_{13} C_{43} B_{31} \\
& - 4 A_{35} B_{41} C_{14} A_{13} C_{44} B_{31} - 4 A_{35} B_{41} C_{14} A_{13} B_{44} B_{31} \\
& + 4 A_{35} B_{41}^2 C_{14} A_{13} B_{33} - 4 A_{35} B_{41} C_{14} A_{13} B_{43} B_{31} \\
& - 4 A_{15} B_{33} B_{41} A_{43} B_{31} C_{14} - 4 A_{15} B_{33}^2 B_{41}^2 A_{13} \\
& + 8 A_{15} B_{33} B_{41} A_{13} B_{43} B_{31} + 4 A_{15} B_{33} B_{41}^2 A_{33} C_{13} \\
& - 4 A_{15} B_{43} B_{31} A_{33} B_{41} B_{13} - 4 A_{15} B_{43} B_{31} A_{33} B_{41} C_{14} \\
& + 4 A_{15} B_{43} B_{31}^2 A_{43} B_{13} + 4 A_{15} B_{43} B_{31}^2 A_{43} C_{13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 4 A_{15} B_{43} B_{31}^2 A_{43} C_{14} - 4 A_{15} B_{43}^2 B_{31}^2 A_{13} \\
& - 4 A_{15} B_{43} B_{31} A_{33} B_{41} C_{13} - 4 A_{15} B_{44} B_{31} A_{33} B_{41} B_{13} \\
& - 4 A_{15} B_{44} B_{31} A_{33} B_{41} C_{14} + 4 A_{15} B_{44} B_{31}^2 A_{43} B_{13} \\
& + 4 A_{15} B_{44} B_{31}^2 A_{43} C_{13} + 4 A_{15} B_{44} B_{31}^2 A_{43} C_{14} \\
& - 4 A_{15} B_{44}^2 B_{31}^2 A_{13} + 8 A_{15} B_{44} B_{31} A_{13} B_{33} B_{41} \\
& - 8 A_{15} B_{44} B_{31}^2 A_{13} B_{43} - 4 A_{15} B_{44} B_{31} A_{33} B_{41} C_{13} \\
& - 4 A_{15} B_{34}^2 B_{41}^2 A_{13} + 4 A_{15} B_{34} B_{41}^2 A_{33} B_{13} \\
& + 4 A_{15} B_{34} B_{41}^2 A_{33} C_{14} - 4 A_{15} B_{34} B_{41} A_{43} B_{31} B_{13} \\
& - 4 A_{15} B_{34} B_{41} A_{43} B_{31} C_{13} - 4 A_{15} B_{34} B_{41} A_{43} B_{31} C_{14} \\
& - 8 A_{15} B_{34} B_{41}^2 A_{13} B_{33} + 8 A_{15} B_{34} B_{41} A_{13} B_{43} B_{31} \\
& + 4 A_{15} B_{34} B_{41}^2 A_{33} C_{13} + 4 A_{15} B_{33} B_{41}^2 A_{33} B_{13} \\
& + 4 A_{15} B_{33} B_{41}^2 A_{33} C_{14} - 4 A_{15} B_{33} B_{41} A_{43} B_{31} B_{13} \\
& + 4 A_{45} B_{31}^2 C_{13} A_{13} B_{44} - 4 A_{45} B_{31} C_{13} A_{13} B_{33} B_{41} \\
& + 4 A_{45} B_{31}^2 C_{13} A_{13} B_{43} - 4 A_{45} B_{31} C_{13} A_{13} C_{34} B_{41} \\
& + 4 A_{45} B_{31} C_{13}^2 A_{33} B_{41} - 4 A_{45} B_{31} C_{14} A_{13} B_{34} B_{41} \\
& + 4 A_{45} B_{31} C_{14}^2 A_{33} B_{41} - 4 A_{45} B_{31}^2 C_{14}^2 A_{43} \\
& - 4 A_{45} B_{31} C_{14} A_{13} C_{33} B_{41} + 4 A_{45} B_{31}^2 C_{14} A_{13} C_{43} \\
& + 4 A_{45} B_{31}^2 C_{14} A_{13} C_{44} + 4 A_{45} B_{31}^2 C_{14} A_{13} B_{44} \\
& - 4 A_{45} B_{31} C_{14} A_{13} B_{33} B_{41} + 4 A_{45} B_{31}^2 C_{14} A_{13} B_{43} \\
& - 4 A_{45} B_{31} C_{14} A_{13} C_{34} B_{41} - 8 A_{15} C_{33} B_{41}^2 A_{13} B_{34} \\
& + 4 A_{15} C_{33} B_{41}^2 A_{33} B_{13} + 4 A_{15} C_{33} B_{41}^2 A_{33} C_{14} \\
& - 4 A_{15} C_{33} B_{41} A_{43} B_{31} B_{13} - 4 A_{15} C_{33} B_{41} A_{43} B_{31} C_{13} \\
& - 4 A_{15} C_{33} B_{41} A_{43} B_{31} C_{14} - 4 A_{15} C_{33}^2 B_{41}^2 A_{13} \\
& + 8 A_{15} C_{33} B_{41} A_{13} C_{43} B_{31} + 8 A_{15} C_{33} B_{41} A_{13} C_{44} B_{31} \\
& + 8 A_{15} C_{33} B_{41} A_{13} B_{44} B_{31} - 8 A_{15} C_{33} B_{41}^2 A_{13} B_{33} \\
& + 8 A_{15} C_{33} B_{41} A_{13} B_{43} B_{31} - 8 A_{15} C_{33} B_{41}^2 A_{13} C_{34} \\
& + 4 A_{15} C_{33} B_{41}^2 A_{33} C_{13} + 8 A_{15} C_{43} B_{31} A_{13} B_{34} B_{41} \\
& - 4 A_{15} C_{43} B_{31} A_{33} B_{41} B_{13} - 4 A_{15} C_{43} B_{31} A_{33} B_{41} C_{14} \\
& + 4 A_{15} C_{43} B_{31}^2 A_{43} B_{13} + 4 A_{15} C_{43} B_{31}^2 A_{43} C_{13} \\
& + 4 A_{15} C_{43} B_{31}^2 A_{43} C_{14} - 4 A_{15} C_{43}^2 B_{31}^2 A_{13} \\
& - 8 A_{15} C_{43} B_{31}^2 A_{13} C_{44} - 8 A_{15} C_{43} B_{31}^2 A_{13} B_{44} \\
& + 8 A_{15} C_{43} B_{31} A_{13} B_{33} B_{41} - 8 A_{15} C_{43} B_{31}^2 A_{13} B_{43}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 8 A_{15} C_{43} B_{31} A_{13} C_{34} B_{41} - 4 A_{15} C_{43} B_{31} A_{33} B_{41} C_{13} \\
& + 8 A_{15} C_{44} B_{31} A_{13} B_{34} B_{41} - 4 A_{15} C_{44} B_{31} A_{33} B_{41} B_{13} \\
& - 4 A_{15} C_{44} B_{31} A_{33} B_{41} C_{14} + 4 A_{15} C_{44} B_{31}^2 A_{43} B_{13} \\
& + 4 A_{15} C_{44} B_{31}^2 A_{43} C_{13} + 4 A_{15} C_{44} B_{31}^2 A_{43} C_{14} \\
& - 4 A_{15} C_{44}^2 B_{31}^2 A_{13} - 8 A_{15} C_{44} B_{31}^2 A_{13} B_{44} \\
& + 8 A_{15} C_{44} B_{31} A_{13} B_{33} B_{41} - 8 A_{15} C_{44} B_{31}^2 A_{13} B_{43} \\
& + 8 A_{15} C_{44} B_{31} A_{13} C_{34} B_{41} - 4 A_{15} C_{44} B_{31} A_{33} B_{41} C_{13} \\
& - 8 A_{15} C_{34} B_{41}^2 A_{13} B_{34} + 4 A_{15} C_{34} B_{41}^2 A_{33} B_{13} \\
& + 4 A_{15} C_{34} B_{41}^2 A_{33} C_{14} - 4 A_{15} C_{34} B_{41} A_{43} B_{31} B_{13} \\
& - 4 A_{15} C_{34} B_{41} A_{43} B_{31} C_{13} - 4 A_{15} C_{34} B_{41} A_{43} B_{31} C_{14} \\
& + 8 A_{15} C_{34} B_{41} A_{13} B_{44} B_{31} - 8 A_{15} C_{34} B_{41}^2 A_{13} B_{33} \\
& + 8 A_{15} C_{34} B_{41} A_{13} B_{43} B_{31} - 4 A_{15} C_{34}^2 B_{41}^2 A_{13} \\
& + 4 A_{15} C_{34} B_{41}^2 A_{33} C_{13} - 4 A_{45} B_{31} B_{13} A_{13} B_{34} B_{41} \\
& + 4 A_{45} B_{31} B_{13}^2 A_{33} B_{41} + 8 A_{45} B_{31} B_{13} A_{33} B_{41} C_{14} \\
& - 4 A_{45} B_{31}^2 B_{13}^2 A_{43} - 8 A_{45} B_{31}^2 B_{13} A_{43} C_{13} \\
& - 8 A_{45} B_{31}^2 B_{13} A_{43} C_{14} - 4 A_{45} B_{31} B_{13} A_{13} C_{33} B_{41} \\
& + 4 A_{45} B_{31}^2 B_{13} A_{13} C_{43} + 4 A_{45} B_{31}^2 B_{13} A_{13} C_{44} \\
& + 4 A_{45} B_{31}^2 B_{13} A_{13} B_{44} - 4 A_{45} B_{31} B_{13} A_{13} B_{33} B_{41} \\
& + 4 A_{45} B_{31}^2 B_{13} A_{13} B_{43} - 4 A_{45} B_{31} B_{13} A_{13} C_{34} B_{41} \\
& + 8 A_{45} B_{31} B_{13} A_{33} B_{41} C_{13} - 4 A_{45} B_{31} C_{13} A_{13} B_{34} B_{41} \\
& + 8 A_{45} B_{31} C_{13} A_{33} B_{41} C_{14} - 4 A_{45} B_{31}^2 C_{13}^2 A_{43} \\
& - 8 A_{45} B_{31}^2 C_{13} A_{43} C_{14} - 4 A_{45} B_{31} C_{13} A_{13} C_{33} B_{41} \\
& + 4 A_{45} B_{31}^2 C_{13} A_{13} C_{43} + 4 A_{35} B_{41}^2 C_{14} A_{13} C_{34} \\
& + 4 A_{45} B_{31}^2 C_{13} A_{13} C_{44} + 8 A_{15} B_{44} B_{31} A_{13} B_{34} B_{41} \\
& - 4 A_{15} B_{33} B_{41} A_{43} B_{31} C_{13} - 2 A_{34} B_{41}^2 C_{13} A_{14} B_{33} \\
& + 2 A_{34} B_{41} C_{13} A_{14} B_{43} B_{31} - 2 A_{34} B_{41} C_{14}^2 A_{44} B_{31} \\
& - 2 A_{34} B_{41}^2 C_{14} A_{14} C_{33} + 2 A_{34} B_{41} C_{14} A_{14} C_{43} B_{31} \\
& + 2 A_{34} B_{41} C_{14} A_{14} C_{44} B_{31} - 2 A_{34} B_{41}^2 C_{14} A_{14} C_{34} \\
& + 2 A_{34} B_{41} C_{14} A_{14} B_{44} B_{31} - 2 A_{34} B_{41}^2 C_{14} A_{14} B_{34} \\
& - 2 A_{34} B_{41}^2 C_{14} A_{14} B_{33} + 2 A_{34} B_{41} C_{14} A_{14} B_{43} B_{31} \\
& + 2 A_{44}^2 B_{31}^2 B_{13} C_{13} + 2 A_{44}^2 B_{31}^2 B_{13} C_{14} \\
& + 2 A_{44} B_{31} B_{13} A_{14} C_{33} B_{41} - 2 A_{44} B_{31}^2 B_{13} A_{14} C_{43}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 2 A_{44} B_{31}^2 B_{13} A_{14} C_{44} + 2 A_{44} B_{31} B_{13} A_{14} C_{34} B_{41} \\
& - 2 A_{44} B_{31}^2 B_{13} A_{14} B_{44} + 2 A_{44} B_{31} B_{13} A_{14} B_{34} B_{41} \\
& + 2 A_{44} B_{31} B_{13} A_{14} B_{33} B_{41} - 2 A_{44} B_{31}^2 B_{13} A_{14} B_{43} \\
& + 2 A_{44}^2 B_{31}^2 C_{13} C_{14} + 2 A_{44} B_{31} C_{13} A_{14} C_{33} B_{41} \\
& - 2 A_{44} B_{31}^2 C_{13} A_{14} C_{43} - 2 A_{44} B_{31}^2 C_{13} A_{14} C_{44} \\
& + 2 A_{44} B_{31} C_{13} A_{14} C_{34} B_{41} - 2 A_{44} B_{31}^2 C_{13} A_{14} B_{44} \\
& + 2 A_{44} B_{31} C_{13} A_{14} B_{34} B_{41} + 2 A_{44} B_{31} C_{13} A_{14} B_{33} B_{41} \\
& - 2 A_{44} B_{31}^2 C_{13} A_{14} B_{43} + 2 A_{44} B_{31} C_{14} A_{14} C_{33} B_{41} \\
& - 2 A_{44} B_{31}^2 C_{14} A_{14} C_{43} - 2 A_{44} B_{31}^2 C_{14} A_{14} C_{44} \\
& + 2 A_{44} B_{31} C_{14} A_{14} C_{34} B_{41} - 2 A_{44} B_{31}^2 C_{14} A_{14} B_{44} \\
& + 2 A_{44} B_{31} C_{14} A_{14} B_{34} B_{41} + 2 A_{44} B_{31} C_{14} A_{14} B_{33} B_{41} \\
& - 2 A_{44} B_{31}^2 C_{14} A_{14} B_{43} - 2 A_{14}^2 C_{33} B_{41} C_{43} B_{31} \\
& - 2 A_{14}^2 C_{33} B_{41} C_{44} B_{31} + 2 A_{14}^2 C_{33} B_{41}^2 C_{34} \\
& - 2 A_{14}^2 C_{33} B_{41} B_{44} B_{31} + 2 A_{14}^2 C_{33} B_{41}^2 B_{34} \\
& + 2 A_{14}^2 C_{33} B_{41}^2 B_{33} - 2 A_{14}^2 C_{33} B_{41} B_{43} B_{31} \\
& + 2 A_{14}^2 C_{43} B_{31}^2 C_{44} - 2 A_{14}^2 C_{43} B_{31} C_{34} B_{41} \\
& + 2 A_{14}^2 C_{43} B_{31}^2 B_{44} - 2 A_{14}^2 C_{43} B_{31} B_{34} B_{41} \\
& - 2 A_{14}^2 C_{43} B_{31} B_{33} B_{41} + 2 A_{14}^2 C_{43} B_{31}^2 B_{43} \\
& - 2 A_{14}^2 C_{44} B_{31} C_{34} B_{41} + 2 A_{14}^2 C_{44} B_{31}^2 B_{44} \\
& - 2 A_{14}^2 C_{44} B_{31} B_{34} B_{41} - 2 A_{14}^2 C_{44} B_{31} B_{33} B_{41} \\
& + 2 A_{14}^2 C_{44} B_{31}^2 B_{43} - 2 A_{14}^2 C_{34} B_{41} B_{44} B_{31} \\
& + 2 A_{14}^2 C_{34} B_{41}^2 B_{34} + 2 A_{14}^2 C_{34} B_{41}^2 B_{33} \\
& - 2 A_{14}^2 C_{34} B_{41} B_{43} B_{31} - 2 A_{14}^2 B_{44} B_{31} B_{34} B_{41} \\
& - 2 A_{14}^2 B_{44} B_{31} B_{33} B_{41} + 2 A_{14}^2 B_{44} B_{31}^2 B_{43} \\
& + A_{14}^2 C_{43}^2 B_{31}^2 + A_{34}^2 B_{41}^2 B_{13}^2 \\
& + A_{14}^2 B_{33}^2 B_{41}^2 + A_{14}^2 C_{44}^2 B_{31}^2 + A_{34}^2 B_{41}^2 C_{14}^2 \\
& + A_{14}^2 B_{43}^2 B_{31}^2 + A_{34}^2 B_{41}^2 C_{13}^2 \\
& + A_{44}^2 B_{31}^2 C_{13}^2)^{\frac{1}{2}} \Big/ \left( -A_{35} B_{41} B_{13} - A_{35} B_{41} C_{13} \right. \\
& - A_{35} B_{41} C_{14} + A_{45} B_{31} B_{13} + A_{45} B_{31} C_{13} \\
& + A_{45} B_{31} C_{14} + A_{15} C_{33} B_{41} - A_{15} C_{43} B_{31} \\
& - A_{15} C_{44} B_{31} + A_{15} C_{34} B_{41} - A_{15} B_{44} B_{31} \\
& \left. + A_{15} B_{34} B_{41} + A_{15} B_{33} B_{41} - A_{15} B_{43} B_{31} \right)
\end{aligned}$$

## Приложение 2 ( $\alpha$ )

$$\begin{aligned}
& \sigma_5 M^{10} \omega + (-5 \sigma_5 \omega^2 + \varepsilon_1 \sigma_5 \omega - 5 \sigma_5 M_{min} \omega + \sigma_4 \omega) M^9 + (-4 \sigma_4 M_{min} \omega \\
& + \frac{45}{2} \sigma_5 M_{min} \omega^2 - \frac{9}{2} \varepsilon_1 \sigma_5 \omega^2 - \frac{9}{2} \sigma_4 \omega^2 + \varepsilon_1 \sigma_4 \omega + \sigma_3 \omega + \varepsilon_2 \sigma_5 \omega + 10 \sigma_5 M_{min}^2 \omega \\
& + 12 \sigma_5 \omega^3 - 5 \varepsilon_1 \sigma_5 M_{min} \omega) M^8 + (-3 \sigma_3 M_{min} \omega + \varepsilon_2 \sigma_4 \omega - 5 \varepsilon_2 \sigma_5 M_{min} \omega \\
& + 6 \sigma_4 M_{min}^2 \omega + \varepsilon_1 \sigma_3 \omega - 10 \sigma_5 M_{min}^3 \omega - 4 \varepsilon_1 \sigma_4 \omega^2 + \varepsilon_3 \sigma_5 \omega - \frac{140}{3} \sigma_5 M_{min} \omega^3 \\
& + \frac{28}{3} \sigma_4 \omega^3 - 4 \sigma_3 \omega^2 + \sigma_2 \omega - 40 \sigma_5 M_{min}^2 \omega^2 + 16 \sigma_4 M_{min} \omega^2 + 20 \varepsilon_1 \sigma_5 M_{min} \omega^2 \\
& - 18 \sigma_5 \omega^4 - 4 \varepsilon_1 \sigma_4 M_{min} \omega - 4 \varepsilon_2 \sigma_5 \omega^2 + 10 \varepsilon_1 \sigma_5 M_{min}^2 \omega + \frac{28}{3} \varepsilon_1 \sigma_5 \omega^3) M^7 + ( \\
& - \frac{7}{2} \sigma_2 \omega^2 - 35 \varepsilon_1 \sigma_5 M_{min}^2 \omega^2 + 14 \varepsilon_1 \sigma_4 M_{min} \omega^2 - 4 \varepsilon_2 \sigma_4 M_{min} \omega - \frac{35}{3} \sigma_4 \omega^4 \\
& + 35 \sigma_5 M_{min}^3 \omega^2 - 4 \sigma_4 M_{min}^3 \omega - 21 \sigma_4 M_{min}^2 \omega^2 - 2 \sigma_2 M_{min} \omega + \frac{21}{2} \sigma_3 M_{min} \omega^2 \\
& - \frac{7}{2} \varepsilon_2 \sigma_4 \omega^2 + \varepsilon_4 \sigma_5 \omega + 7 \varepsilon_1 \sigma_4 \omega^3 + \varepsilon_3 \sigma_4 \omega + 5 \sigma_5 M_{min}^4 \omega + \varepsilon_1 \sigma_2 \omega - \frac{35}{3} \varepsilon_1 \sigma_5 \omega^4 \\
& + 70 \sigma_5 M_{min}^2 \omega^3 + 7 \varepsilon_2 \sigma_5 \omega^3 - \frac{7}{2} \varepsilon_1 \sigma_3 \omega^2 + 18 \sigma_5 \omega^5 + 7 \sigma_3 \omega^3 - \frac{7}{2} \varepsilon_3 \sigma_5 \omega^2 \\
& + 3 \sigma_3 M_{min}^2 \omega - 28 \sigma_4 M_{min} \omega^3 + \varepsilon_2 \sigma_3 \omega + \frac{175}{3} \sigma_5 M_{min} \omega^4 + 10 \varepsilon_2 \sigma_5 M_{min}^2 \omega \\
& - 35 \varepsilon_1 \sigma_5 M_{min} \omega^3 + 6 \varepsilon_1 \sigma_4 M_{min}^2 \omega + \frac{35}{2} \varepsilon_2 \sigma_5 M_{min} \omega^2 - 5 \varepsilon_3 \sigma_5 M_{min} \omega \\
& - 3 \varepsilon_1 \sigma_3 M_{min} \omega - 10 \varepsilon_1 \sigma_5 M_{min}^3 \omega) M^6 + (\sigma_2 M_{min}^2 \omega + 12 \sigma_4 M_{min}^3 \omega^2 \\
& + 15 \varepsilon_3 \sigma_5 M_{min} \omega^2 - 20 \varepsilon_1 \sigma_4 M_{min} \omega^3 + 12 \varepsilon_2 \sigma_4 M_{min} \omega^2 + 5 \varepsilon_1 \sigma_5 M_{min}^4 \omega \\
& + 3 \varepsilon_1 \sigma_3 M_{min}^2 \omega - 4 \varepsilon_3 \sigma_4 M_{min} \omega - 7 \sigma_3 \omega^4 - 70 \sigma_5 M_{min}^2 \omega^4 + \varepsilon_2 \sigma_2 \omega - 3 \varepsilon_2 \sigma_3 \omega^2 \\
& - \frac{140}{3} \sigma_5 M_{min} \omega^5 + 5 \varepsilon_1 \sigma_3 \omega^3 + \sigma_4 M_{min}^4 \omega + \varepsilon_4 \sigma_4 \omega - \sigma_5 M_{min}^5 \omega + \frac{28}{3} \varepsilon_1 \sigma_5 \omega^5 \\
& + 28 \sigma_4 M_{min} \omega^4 - 15 \sigma_5 M_{min}^4 \omega^2 - 3 \varepsilon_1 \sigma_2 \omega^2 + 30 \sigma_4 M_{min}^2 \omega^3 - \sigma_3 M_{min}^3 \omega \\
& + 5 \varepsilon_3 \sigma_5 \omega^3 - 3 \varepsilon_4 \sigma_5 \omega^2 + \frac{28}{3} \sigma_4 \omega^5 + 5 \sigma_2 \omega^3 - 12 \sigma_5 \omega^6 - 7 \varepsilon_2 \sigma_5 \omega^4 + \varepsilon_3 \sigma_3 \omega \\
& - 3 \varepsilon_3 \sigma_4 \omega^2 + 5 \varepsilon_2 \sigma_4 \omega^3 + 6 \sigma_2 M_{min} \omega^2 - 15 \sigma_3 M_{min} \omega^3 - 7 \varepsilon_1 \sigma_4 \omega^4 - 9 \sigma_3 M_{min}^2 \omega^2 \\
& + 6 \varepsilon_2 \sigma_4 M_{min}^2 \omega - 3 \varepsilon_2 \sigma_3 M_{min} \omega - 10 \varepsilon_2 \sigma_5 M_{min}^3 \omega - 2 \varepsilon_1 \sigma_2 M_{min} \omega \\
& + 10 \varepsilon_3 \sigma_5 M_{min}^2 \omega - 5 \varepsilon_4 \sigma_5 M_{min} \omega - 4 \varepsilon_1 \sigma_4 M_{min}^3 \omega + 9 \varepsilon_1 \sigma_3 M_{min} \omega^2 \\
& + 35 \varepsilon_1 \sigma_5 M_{min} \omega^4 - 18 \varepsilon_1 \sigma_4 M_{min}^2 \omega^2 - 25 \varepsilon_2 \sigma_5 M_{min} \omega^3 + 30 \varepsilon_1 \sigma_5 M_{min}^3 \omega^2 \\
& - 30 \varepsilon_2 \sigma_5 M_{min}^2 \omega^2 + 50 \varepsilon_1 \sigma_5 M_{min}^2 \omega^3 - 50 \sigma_5 M_{min}^3 \omega^3) M^5 + (-\frac{5}{2} \varepsilon_3 \sigma_3 \omega^2 \\
& - \frac{5}{2} \sigma_4 M_{min}^4 \omega^2 + \frac{36}{7} \sigma_5 \omega^7 - 3 \ln(M - \omega) \varepsilon_3 \sigma_3 M_{min}^2 + \ln(M - \omega) \varepsilon_2 \sigma_5 M_{min}^5 \\
& + \ln(M - \omega) \varepsilon_2 \sigma_3 M_{min}^3 + 3 \ln(M - \omega) \varepsilon_4 \sigma_3 M_{min} - \ln(M - \omega) \varepsilon_2 \sigma_2 M_{min}^2 \\
& - 5 \ln(M - \omega) \varepsilon_3 \sigma_5 M_{min}^4 - 6 \ln(M - \omega) \varepsilon_4 \sigma_4 M_{min}^2 + 2 \ln(M - \omega) \varepsilon_3 \sigma_2 M_{min} \\
& + 10 \ln(M - \omega) \varepsilon_4 \sigma_5 M_{min}^3 + 4 \ln(M - \omega) \varepsilon_3 \sigma_4 M_{min}^3 - \ln(M - \omega) \varepsilon_2 \sigma_4 M_{min}^4
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& +\varepsilon_1 \sigma_4 M_{min}^4 \omega + 3 \varepsilon_2 \sigma_3 M_{min}^2 \omega - \frac{15}{2} \varepsilon_1 \sigma_3 M_{min}^2 \omega^2 - \frac{50}{3} \varepsilon_3 \sigma_5 M_{min} \omega^3 \\
& + \frac{15}{2} \varepsilon_2 \sigma_3 M_{min} \omega^2 - \frac{40}{3} \varepsilon_2 \sigma_4 M_{min} \omega^3 - \varepsilon_1 \sigma_5 M_{min}^5 \omega - 4 \varepsilon_2 \sigma_4 M_{min}^3 \omega \\
& - \frac{15}{4} \varepsilon_2 \sigma_4 \omega^4 + \ln(M) \varepsilon_4 \sigma_2 - 2 \ln(M) \varepsilon_3 \sigma_2 M_{min} + 5 \ln(M) \varepsilon_3 \sigma_5 M_{min}^4 \\
& - \ln(M) \varepsilon_2 \sigma_5 M_{min}^5 + \ln(M) \varepsilon_2 \sigma_4 M_{min}^4 - 10 \ln(M) \varepsilon_4 \sigma_5 M_{min}^3 - 3 \ln(M) \varepsilon_4 \sigma_3 M_{min} \\
& + 6 \ln(M) \varepsilon_4 \sigma_4 M_{min}^2 - 4 \ln(M) \varepsilon_3 \sigma_4 M_{min}^3 + \ln(M) \varepsilon_2 \sigma_2 M_{min}^2 - \ln(M) \varepsilon_2 \sigma_3 M_{min}^3 \\
& + 3 \ln(M) \varepsilon_3 \sigma_3 M_{min}^2 + 5 \varepsilon_1 \sigma_2 M_{min} \omega^2 - \frac{25}{2} \varepsilon_1 \sigma_5 M_{min}^4 \omega^2 + 10 \sigma_3 M_{min}^2 \omega^3 \\
& + \frac{75}{2} \sigma_5 M_{min}^3 \omega^4 - \frac{5}{2} \varepsilon_4 \sigma_4 \omega^2 + \frac{50}{3} \sigma_5 M_{min}^4 \omega^3 + \frac{10}{3} \varepsilon_4 \sigma_5 \omega^3 + \frac{45}{4} \sigma_3 M_{min} \omega^4 \\
& - \frac{84}{5} \sigma_4 M_{min} \omega^5 + \frac{5}{2} \sigma_3 M_{min}^3 \omega^2 + \frac{70}{3} \sigma_5 M_{min} \omega^6 - \frac{45}{2} \sigma_4 M_{min}^2 \omega^4 - \frac{20}{3} \sigma_2 M_{min} \omega^3 \\
& - \frac{14}{3} \varepsilon_1 \sigma_5 \omega^6 + 42 \sigma_5 M_{min}^2 \omega^5 + \frac{10}{3} \varepsilon_3 \sigma_4 \omega^3 + \frac{10}{3} \varepsilon_1 \sigma_2 \omega^3 + \frac{21}{5} \varepsilon_1 \sigma_4 \omega^5 + \varepsilon_4 \sigma_3 \omega \\
& - \frac{5}{2} \varepsilon_2 \sigma_2 \omega^2 - \ln(M - \omega) \varepsilon_4 \sigma_2 + \frac{21}{5} \sigma_3 \omega^5 - \frac{14}{3} \sigma_4 \omega^6 - \frac{15}{4} \sigma_2 \omega^4 + \frac{10}{3} \varepsilon_2 \sigma_3 \omega^3 \\
& - \frac{5}{2} \sigma_2 M_{min}^2 \omega^2 - \frac{15}{4} \varepsilon_1 \sigma_3 \omega^4 + \frac{21}{5} \varepsilon_2 \sigma_5 \omega^5 - \frac{40}{3} \sigma_4 M_{min}^3 \omega^3 - \frac{15}{4} \varepsilon_3 \sigma_5 \omega^4 \\
& + \frac{5}{2} \sigma_5 M_{min}^5 \omega^2 + \varepsilon_3 \sigma_2 \omega - 10 \varepsilon_3 \sigma_5 M_{min}^3 \omega + 5 \varepsilon_2 \sigma_5 M_{min}^4 \omega + \varepsilon_1 \sigma_2 M_{min}^2 \omega \\
& + 10 \varepsilon_4 \sigma_5 M_{min}^2 \omega - \varepsilon_1 \sigma_3 M_{min}^3 \omega + 25 \varepsilon_2 \sigma_5 M_{min}^3 \omega^2 + 15 \varepsilon_1 \sigma_4 M_{min} \omega^4 \\
& - 3 \varepsilon_3 \sigma_3 M_{min} \omega - 2 \varepsilon_2 \sigma_2 M_{min} \omega + 6 \varepsilon_3 \sigma_4 M_{min}^2 \omega - 4 \varepsilon_4 \sigma_4 M_{min} \omega \\
& - 15 \varepsilon_2 \sigma_4 M_{min}^2 \omega^2 - 25 \varepsilon_3 \sigma_5 M_{min}^2 \omega^2 + 10 \varepsilon_3 \sigma_4 M_{min} \omega^2 + \frac{25}{2} \varepsilon_4 \sigma_5 M_{min} \omega^2 \\
& + 10 \varepsilon_1 \sigma_4 M_{min}^3 \omega^2 - 21 \varepsilon_1 \sigma_5 M_{min} \omega^5 + 20 \varepsilon_1 \sigma_4 M_{min}^2 \omega^3 - \frac{75}{2} \varepsilon_1 \sigma_5 M_{min}^2 \omega^4 \\
& + \frac{100}{3} \varepsilon_2 \sigma_5 M_{min}^2 \omega^3 + \frac{75}{4} \varepsilon_2 \sigma_5 M_{min} \omega^4 - 10 \varepsilon_1 \sigma_3 M_{min} \omega^3 - \frac{100}{3} \varepsilon_1 \sigma_5 M_{min}^3 \omega^3) M^4 \\
& + (-2 \varepsilon_3 \sigma_2 \omega^2 + \frac{20}{3} \sigma_4 M_{min}^3 \omega^4 + \frac{3}{2} \varepsilon_2 \sigma_4 \omega^5 + \frac{4}{3} \sigma_4 \omega^7 + 12 \ln(M - \omega) \varepsilon_4 \sigma_4 M_{min}^2 \omega \\
& + 6 \ln(M - \omega) \varepsilon_3 \sigma_3 M_{min}^2 \omega + 2 \ln(M - \omega) \varepsilon_4 \sigma_2 \omega - 6 \varepsilon_2 \sigma_3 M_{min} \omega^3 \\
& + \frac{25}{3} \varepsilon_3 \sigma_5 M_{min} \omega^4 - 6 \varepsilon_2 \sigma_3 M_{min}^2 \omega^2 + \frac{20}{3} \varepsilon_2 \sigma_4 M_{min} \omega^4 - 2 \varepsilon_1 \sigma_4 M_{min}^4 \omega^2 \\
& - 12 \varepsilon_3 \sigma_4 M_{min}^2 \omega^2 - 20 \varepsilon_2 \sigma_5 M_{min}^3 \omega^3 + 15 \varepsilon_1 \sigma_5 M_{min}^2 \omega^5 + 8 \varepsilon_2 \sigma_4 M_{min}^3 \omega^2 \\
& - 4 \varepsilon_1 \sigma_2 M_{min} \omega^3 + 20 \varepsilon_3 \sigma_5 M_{min}^2 \omega^3 - \frac{5}{3} \varepsilon_4 \sigma_5 \omega^4 - \frac{7}{5} \sigma_3 \omega^6 - \frac{9}{7} \sigma_5 \omega^8 \\
& - 6 \ln(M - \omega) \varepsilon_4 \sigma_3 M_{min} \omega - 20 \ln(M - \omega) \varepsilon_4 \sigma_5 M_{min}^3 \omega \\
& + 10 \ln(M - \omega) \varepsilon_3 \sigma_5 M_{min}^4 \omega + 2 \ln(M - \omega) \varepsilon_2 \sigma_2 M_{min}^2 \omega \\
& - 2 \ln(M - \omega) \varepsilon_2 \sigma_5 M_{min}^5 \omega - 2 \ln(M) \varepsilon_2 \sigma_2 M_{min}^2 \omega - 6 \ln(M) \varepsilon_3 \sigma_3 M_{min}^2 \omega \\
& + 4 \ln(M) \varepsilon_3 \sigma_2 M_{min} \omega + 2 \ln(M) \varepsilon_2 \sigma_3 M_{min}^3 \omega + 8 \ln(M) \varepsilon_3 \sigma_4 M_{min}^3 \omega \\
& + 2 \ln(M) \varepsilon_2 \sigma_5 M_{min}^5 \omega + 20 \ln(M) \varepsilon_4 \sigma_5 M_{min}^3 \omega - 2 \ln(M) \varepsilon_4 \sigma_2 \omega \\
& - 2 \ln(M) \varepsilon_2 \sigma_4 M_{min}^4 \omega - 12 \ln(M) \varepsilon_4 \sigma_4 M_{min}^2 \omega + 6 \ln(M) \varepsilon_4 \sigma_3 M_{min} \omega
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -10 \ln(M) \varepsilon_3 \sigma_5 M_{min}^4 \omega - 2 \ln(M - \omega) \varepsilon_2 \sigma_3 M_{min}^3 \omega + 2 \ln(M - \omega) \varepsilon_2 \sigma_4 M_{min}^4 \omega \\
& \quad - 8 \ln(M - \omega) \varepsilon_3 \sigma_4 M_{min}^3 \omega - 4 \ln(M - \omega) \varepsilon_3 \sigma_2 M_{min} \omega + 2 \sigma_4 M_{min}^4 \omega^3 \\
& \quad - 14 \sigma_5 M_{min}^2 \omega^6 - 2 \sigma_3 M_{min}^3 \omega^3 - 2 \varepsilon_4 \sigma_3 \omega^2 - \frac{25}{3} \sigma_5 M_{min}^4 \omega^4 - \frac{7}{5} \varepsilon_2 \sigma_5 \omega^6 \\
& + \frac{10}{3} \sigma_2 M_{min} \omega^4 + \frac{3}{2} \varepsilon_1 \sigma_3 \omega^5 - 5 \sigma_3 M_{min}^2 \omega^4 + 2 \varepsilon_2 \sigma_2 \omega^3 + 2 \sigma_2 M_{min}^2 \omega^3 + 2 \varepsilon_3 \sigma_3 \omega^3 \\
& \quad + \frac{3}{2} \varepsilon_3 \sigma_5 \omega^5 - 2 \sigma_5 M_{min}^5 \omega^3 - \frac{5}{3} \varepsilon_1 \sigma_2 \omega^4 - \frac{7}{5} \varepsilon_1 \sigma_4 \omega^6 + \frac{3}{2} \sigma_2 \omega^5 + \frac{4}{3} \varepsilon_1 \sigma_5 \omega^7 \\
& \quad - \frac{9}{2} \sigma_3 M_{min} \omega^5 - \frac{20}{3} \sigma_5 M_{min} \omega^7 + \frac{28}{5} \sigma_4 M_{min} \omega^6 + 9 \sigma_4 M_{min}^2 \omega^5 - 15 \sigma_5 M_{min}^3 \omega^5 \\
& \quad - \frac{5}{3} \varepsilon_2 \sigma_3 \omega^4 - \frac{5}{3} \varepsilon_3 \sigma_4 \omega^4 + 2 \varepsilon_4 \sigma_4 \omega^3 - 2 \varepsilon_1 \sigma_2 M_{min}^2 \omega^2 - 20 \varepsilon_4 \sigma_5 M_{min}^2 \omega^2 \\
& \quad + 2 \varepsilon_1 \sigma_3 M_{min}^3 \omega^2 - 10 \varepsilon_2 \sigma_5 M_{min}^4 \omega^2 + 2 \varepsilon_1 \sigma_5 M_{min}^5 \omega^2 - 6 \varepsilon_1 \sigma_4 M_{min} \omega^5 \\
& \quad + 6 \varepsilon_3 \sigma_3 M_{min} \omega^2 + 20 \varepsilon_3 \sigma_5 M_{min}^3 \omega^2 + 8 \varepsilon_4 \sigma_4 M_{min} \omega^2 + 12 \varepsilon_2 \sigma_4 M_{min}^2 \omega^3 \\
& \quad - 10 \varepsilon_4 \sigma_5 M_{min} \omega^3 - 8 \varepsilon_3 \sigma_4 M_{min} \omega^3 + 6 \varepsilon_1 \sigma_3 M_{min}^2 \omega^3 - 8 \varepsilon_1 \sigma_4 M_{min}^3 \omega^3 \\
& \quad + 4 \varepsilon_2 \sigma_2 M_{min} \omega^2 + 10 \varepsilon_1 \sigma_5 M_{min}^4 \omega^3 + 7 \varepsilon_1 \sigma_5 M_{min} \omega^6 - \frac{50}{3} \varepsilon_2 \sigma_5 M_{min}^2 \omega^4 \\
& \quad - \frac{15}{2} \varepsilon_2 \sigma_5 M_{min} \omega^5 + \frac{50}{3} \varepsilon_1 \sigma_5 M_{min}^3 \omega^4 - 10 \varepsilon_1 \sigma_4 M_{min}^2 \omega^4 + 5 \varepsilon_1 \sigma_3 M_{min} \omega^4) M^3 + ( \\
& \quad \varepsilon_4 \sigma_3 \omega^3 + \frac{5}{6} \sigma_5 M_{min} \omega^8 + \frac{1}{3} \varepsilon_3 \sigma_4 \omega^5 - \frac{1}{2} \sigma_4 M_{min}^4 \omega^4 + \sigma_3 M_{min}^2 \omega^5 - \frac{4}{3} \sigma_4 M_{min}^3 \omega^5 \\
& - 6 \ln(M - \omega) \varepsilon_4 \sigma_4 M_{min}^2 \omega^2 - \ln(M - \omega) \varepsilon_2 \sigma_2 M_{min}^2 \omega^2 - \ln(M - \omega) \varepsilon_2 \sigma_4 M_{min}^4 \omega^2 \\
& \quad - \ln(M - \omega) \varepsilon_4 \sigma_2 \omega^2 + 2 \ln(M - \omega) \varepsilon_3 \sigma_2 M_{min} \omega^2 - 5 \ln(M - \omega) \varepsilon_3 \sigma_5 M_{min}^4 \omega^2 \\
& \quad - 3 \ln(M - \omega) \varepsilon_3 \sigma_3 M_{min}^2 \omega^2 + 10 \ln(M - \omega) \varepsilon_4 \sigma_5 M_{min}^3 \omega^2 \\
& \quad + \ln(M - \omega) \varepsilon_2 \sigma_5 M_{min}^5 \omega^2 + 3 \ln(M - \omega) \varepsilon_4 \sigma_3 M_{min} \omega^2 - 4 \ln(M) \varepsilon_3 \sigma_4 M_{min}^3 \omega^2 \\
& \quad - 10 \ln(M) \varepsilon_4 \sigma_5 M_{min}^3 \omega^2 - 2 \ln(M) \varepsilon_3 \sigma_2 M_{min} \omega^2 - \ln(M) \varepsilon_2 \sigma_5 M_{min}^5 \omega^2 \\
& \quad + \ln(M) \varepsilon_4 \sigma_2 \omega^2 + \ln(M) \varepsilon_2 \sigma_4 M_{min}^4 \omega^2 + 6 \ln(M) \varepsilon_4 \sigma_4 M_{min}^2 \omega^2 \\
& \quad + 5 \ln(M) \varepsilon_3 \sigma_5 M_{min}^4 \omega^2 - 3 \ln(M) \varepsilon_4 \sigma_3 M_{min} \omega^2 + \ln(M) \varepsilon_2 \sigma_2 M_{min}^2 \omega^2 \\
& - \ln(M) \varepsilon_2 \sigma_3 M_{min}^3 \omega^2 + 3 \ln(M) \varepsilon_3 \sigma_3 M_{min}^2 \omega^2 + \frac{1}{5} \varepsilon_2 \sigma_5 \omega^7 + \frac{1}{3} \varepsilon_4 \sigma_5 \omega^5 - \frac{1}{2} \varepsilon_3 \sigma_3 \omega^4 \\
& \quad + \frac{1}{5} \varepsilon_1 \sigma_4 \omega^7 - \frac{1}{2} \varepsilon_4 \sigma_4 \omega^4 + \varepsilon_3 \sigma_2 \omega^3 + \frac{5}{3} \sigma_5 M_{min}^4 \omega^5 + \frac{1}{3} \varepsilon_2 \sigma_3 \omega^5 - \frac{1}{2} \varepsilon_2 \sigma_2 \omega^4 \\
& \quad + \frac{1}{2} \sigma_3 M_{min}^3 \omega^4 + \frac{1}{2} \sigma_5 M_{min}^5 \omega^4 - \frac{1}{4} \varepsilon_3 \sigma_5 \omega^6 + \frac{1}{3} \varepsilon_1 \sigma_2 \omega^5 + 2 \sigma_5 M_{min}^2 \omega^7 \\
& \quad - \frac{2}{3} \sigma_2 M_{min} \omega^5 - \frac{3}{2} \sigma_4 M_{min}^2 \omega^6 - \frac{1}{4} \varepsilon_2 \sigma_4 \omega^6 - \frac{1}{4} \varepsilon_1 \sigma_3 \omega^6 + \frac{5}{2} \sigma_5 M_{min}^3 \omega^6 \\
& \quad + \frac{3}{4} \sigma_3 M_{min} \omega^6 - \frac{1}{6} \varepsilon_1 \sigma_5 \omega^8 - \frac{4}{5} \sigma_4 M_{min} \omega^7 - \frac{1}{2} \sigma_2 M_{min}^2 \omega^4 - \varepsilon_1 \sigma_5 M_{min} \omega^7 \\
& \quad + \ln(M - \omega) \varepsilon_2 \sigma_3 M_{min}^3 \omega^2 + 4 \ln(M - \omega) \varepsilon_3 \sigma_4 M_{min}^3 \omega^2 - \varepsilon_3 \sigma_3 M_{min}^3 \omega \\
& \quad - \varepsilon_3 \sigma_5 M_{min}^5 \omega - 2 \varepsilon_4 \sigma_2 M_{min} \omega + 3 \varepsilon_4 \sigma_3 M_{min}^2 \omega - 4 \varepsilon_4 \sigma_4 M_{min}^3 \omega \\
& \quad + \varepsilon_3 \sigma_2 M_{min}^2 \omega - \frac{1}{4} \sigma_2 \omega^6 - \frac{10}{3} \varepsilon_1 \sigma_5 M_{min}^3 \omega^5 - \varepsilon_1 \sigma_3 M_{min} \omega^5 + 2 \varepsilon_1 \sigma_4 M_{min}^2 \omega^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\frac{10}{3}\varepsilon_2\sigma_5M_{min}^2\omega^5 + \varepsilon_3\sigma_4M_{min}^4\omega + 5\varepsilon_4\sigma_5M_{min}^4\omega + \frac{5}{4}\varepsilon_2\sigma_5M_{min}\omega^6 \\
& -\frac{5}{2}\varepsilon_1\sigma_5M_{min}^2\omega^6 + \varepsilon_1\sigma_4M_{min}\omega^6 - \frac{5}{3}\varepsilon_3\sigma_5M_{min}\omega^5 + 3\varepsilon_2\sigma_3M_{min}^2\omega^3 \\
& \quad -4\varepsilon_2\sigma_4M_{min}^3\omega^3 - \varepsilon_1\sigma_3M_{min}^3\omega^3 + \varepsilon_1\sigma_2M_{min}^2\omega^3 + \varepsilon_1\sigma_4M_{min}^4\omega^3 \\
& \quad -\varepsilon_1\sigma_5M_{min}^5\omega^3 + 5\varepsilon_2\sigma_5M_{min}^4\omega^3 + 5\varepsilon_2\sigma_5M_{min}^3\omega^4 - \frac{4}{3}\varepsilon_2\sigma_4M_{min}\omega^5 \\
& +10\varepsilon_4\sigma_5M_{min}^2\omega^3 - 4\varepsilon_4\sigma_4M_{min}\omega^3 - 10\varepsilon_3\sigma_5M_{min}^3\omega^3 - 3\varepsilon_3\sigma_3M_{min}\omega^3 \\
& \quad +6\varepsilon_3\sigma_4M_{min}^2\omega^3 - 2\varepsilon_2\sigma_2M_{min}\omega^3 + \frac{3}{2}\varepsilon_2\sigma_3M_{min}\omega^4 - 3\varepsilon_2\sigma_4M_{min}^2\omega^4 \\
& \quad +\frac{5}{2}\varepsilon_4\sigma_5M_{min}\omega^4 - 5\varepsilon_3\sigma_5M_{min}^2\omega^4 + 2\varepsilon_3\sigma_4M_{min}\omega^4 + \varepsilon_1\sigma_2M_{min}\omega^4 \\
& -\frac{5}{2}\varepsilon_1\sigma_5M_{min}^4\omega^4 - \frac{3}{2}\varepsilon_1\sigma_3M_{min}^2\omega^4 + 2\varepsilon_1\sigma_4M_{min}^3\omega^4 + \frac{1}{5}\sigma_3\omega^7 + \frac{1}{7}\sigma_5\omega^9 - \frac{1}{6}\sigma_4\omega^8 \\
& )M^2 + (4\varepsilon_4\sigma_4M_{min}^3\omega^2 - 5\varepsilon_4\sigma_5M_{min}^4\omega^2 + \varepsilon_3\sigma_5M_{min}^5\omega^2 + \varepsilon_4\sigma_4M_{min}^4\omega \\
& \quad -\varepsilon_3\sigma_4M_{min}^4\omega^2 + \varepsilon_3\sigma_3M_{min}^3\omega^2 + \varepsilon_4\sigma_2M_{min}^2\omega + 2\varepsilon_4\sigma_2M_{min}\omega^2 \\
& \quad -\varepsilon_3\sigma_2M_{min}^2\omega^2 - \varepsilon_4\sigma_3M_{min}^3\omega - 3\varepsilon_4\sigma_3M_{min}^2\omega^2 - \varepsilon_4\sigma_5M_{min}^5\omega)M \\
& +\frac{1}{2}\varepsilon_4\sigma_3M_{min}^3\omega^2 + \frac{1}{2}\varepsilon_4\sigma_5M_{min}^5\omega^2 - \frac{1}{2}\varepsilon_4\sigma_4M_{min}^4\omega^2 - \frac{1}{2}\varepsilon_4\sigma_2M_{min}^2\omega^2
\end{aligned}$$

## Приложение 3

Список иллюстраций:

**Рис. 1.** Механизм Хокинга излучения черной дыры.

**Рис. 4.1.** Момент последнего перехода.

**Рис. 4.2.** Простейшая модель замедления и остановки испарения черной дыры на последних стадиях.

**Рис. 4.3.** Закон испарения черной дыры при учете закона сохранения энергии.

**Рис. 4.4.** Закон испарения черной дыры при учете закона сохранения энергии на последних стадиях.

**Рис. 5.1.** Метрические функции  $\sigma$  и  $\epsilon$ .

**Рис. 5.2** Мнимая часть действия  $\Im S$  и его аппроксимация.

# Библиография

- [1] Pullin J. Canonical quantization of general relativity: the last 18 years in a nutshell // gr-qc/0209008
- [2] Грин М., Шварц Дж., Виттен Э. Теория суперструн. В двух томах // М.: Мир, 1990.
- [3] Каку М. Введение в теорию суперструн // М.: Мир, 1999.
- [4] Callan C.G., Friedan D., Martinec E.J., Perry M.J. Strings in background field // Nucl.Phys. В т. 263, стр. 593-609, 1985.
- [5] Schwarz J.H., Seiberg N. String Theory, Supersymmetry, Unification, and All That // Rev.Mod.Phys. т. 71, стр. S112-S120, 1999.
- [6] Antoniadis I., Ovarlez G. An introduction to perturbative and non-perturbative string theory // Лекции, прочитанные в НАТО Advanced Study Institute и Летней Школе Cargese on Flavor и Gauge Hierarchies, Каргис, Франция, 20 июля - 1 августа, 1998, а также на 6-ой Школе в Гелленике и на Школе по Физике Элементарных Частиц, Корфу, Греция, 6-28 сентября, 1998.
- [7] Sen A. Developments in superstring theory // Опубликовано в трудах 29-ой Международной Конференции по Физике Высоких Энергий, Ванкувер, Канада, 23-29 июля, 1998.
- [8] Клапдор-Клайнротхаус Г.В., Штаудт А. Неускорительная физика элементарных частиц // М.: Наука, Физматлит, 1997.

- [9] Guth A. Inflationary Universe: A Possible Solution to the horizon and flatness problems // Phys. Rev. D т. 23, стр. 347, 1981.
- [10] Cardenas V.N. Protecting the holographic principle: inflation // gr-qc/0205070
- [11] Banks T., Remarks on M Theoretic Cosmology // hep-th/9906126
- [12] Townsend P.K. The Story of  $M^*$  // Труды Конференции "Будущее Теоретической Физики и Космологии", посвященной 60-летию Стивена Хокинга, Кембридж, Англия, 7-10 января, 2002.
- [13] Binetruy P., Gaillard M.K. Candidates for the Inflaton Field in Superstring Models // Phys. Rev. D т. 34, стр. 3069, 1986.
- [14] Linde A. Inflationary Cosmology // Phys.Rept т. 333, стр. 575, 2000.
- [15] Зельдович Я., Новиков И. Гипотеза замедлившихся ядер во время расширения и горячая космологическая модель // Астрономический Журнал, т. 43, стр. 758, 1966.
- [16] Dolgov A., Naselsky P., Novikov I. Gravitational waves, baryogenesis, and dark matter from primordial black holes // представлено в Phys. Rev. D, astro-ph/0009407
- [17] Rubin S., Khlopov M., Sakharov A. Possible origin of antimatter regions in the baryon dominated Universe // Phys. Rev D т. 62, стр. 08350, 2000.
- [18] Barrau A. Primordial black holes as a source of extremely high energy cosmic rays // Astropart.Phys. т. 12, стр. 269, 2000.
- [19] Novikov I., Polnarev A., Starobinsky A., Zeldovich Ya. Primordial black holes // Astron.Astrophys. т. 80, стр. 104, 1979.
- [20] Новиков И., Фролов В. Физика черных дыр // М.: Наука, 1986.

- [21] Чандрасекар С. Математическая теория черных дыр. В двух томах // М.: Мир, 1986.
- [22] Sazhin M., Longo D., Capaccioli M., Alcalá J.M., Silvotti R., Covone G., Khovanskaya O., Pavlov M., Pannella M., Radovich M., Testa V. CSL-1: chance projection effect or serendipitous discovery of a gravitational lens induced by a cosmic string? // представлено в Mon. Not. R. Astron Soc, 2002.
- [23] Bezerra de Mello E.R., Bezerra V.B., Grats Yu.V. Selfforces in the space-time of multiple cosmic string // Class. Quant. Grav. т. 15, стр. 1915-1925, 1998.
- [24] Friedman J., Morris M.S. Cauchy problem in spacetime with closed timelike curves // Phys. Rev D, т. 42, No 6, стр. 1915, 1990.
- [25] Frolov V., Novikov I. Physical effects in wormholes and time machines // Phys. Rev. D, т. 42, No 4, стр. 1057, 1990.
- [26] Черепашук А.М. Поиски черных дыр: новейшие данные // УФН, т. 44, No. 8, стр. 821, 2001.
- [27] Черепашук А.М. Звезды Вольфа-Райе и релятивистские объекты // УФН, т. 172, No. 8, стр. 959, 2002.
- [28] Hawking S. Black Hole Evaporation // Nature, т. 248, стр. 30, 1974.
- [29] Page D. Particle emission rates from a black hole. Massless particles from an uncharged, nonrotating hole // Phys.Rev. D т. 13, стр. 198, 1976.
- [30] Page D. Particle emission rates from a black hole. II. - Massless particles from a rotating hole // Phys.Rev. D т. 14, стр. 3260, 1976.
- [31] Page D. Particle emission rates from a black hole. III. - Charged leptons from a nonrotating hole // Phys.Rev. D т. 16, стр. 2402, 1977.

- [32] Berezin V.A. Black hole mass spectrum versus spectrum of Hawking radiation // Phys. Lett. B т. 455, стр. 109-114, 1999.
- [33] Березин В.А. Максимоны Маркова и квантовые черные дыры // Физика эл. частиц и атомн. ядра т. 29, стр. 677-685, 1998.
- [34] Parikh M.K., Wilczek F. Hawking Radiation As Tunneling // Phys. Rev. Lett. т. 85, No 24, стр. 5042, 2000.
- [35] Massar S., Parentani R. How the change in horizon area drives black hole evaporation // Nucl.Phys. B т. 575, стр.333-356, 2000.
- [36] Page D., Hawking S. Gamma rays from primordial black holes // ApJ., т. 206, стр. 1, 1976.
- [37] Carr B., Hawking S. Black holes in the Early Universe // MNRAS, т. 168, стр. 399, 1974.
- [38] Derishev E., Belyanin A. Prospects for detection of primordial black holes captured in cold dark matter // Astron.Astrophys., т. 343, стр. 1, 1999.
- [39] Cline D., Matthey C., Otwinowski S. Study of Very Short Gamma-Ray Bursts // ApJ.. т. 527, стр. 827, 1999.
- [40] Cline B., Hong W. Possibility of unique detection of primordial black hole gamma-ray bursts // ApJ.. т. 401, стр. L57, 1992.
- [41] Cline D. On the possibility that the halo MACHO events and short gamma-ray bursts are due to primordial black holes // Nuclear Phys. B, т. 610, стр. 500, 1996.
- [42] Belyanin A., Kochharovsky V., Kochharovsky Vl. Gamma-ray bursts from the final stage of primordial black hole evaporation // MNRAS, т. 283, стр. 626, 1996.

- [43] Alexeyev S.O., Pomazanov M.V. Internal structure of a Gauss-Bonnet black hole // Grav. Cosmol., т.3, стр. 161, 1997.
- [44] Alexeyev S.O., Sazhin M.V. Four-dimensional Dilatonic Black Holes in a Gauss- Bonnet Extended String Gravity // Gen. Relativ. and Grav. т. 8, стр. 1187, 1998.
- [45] Alexeyev S.O., Sazhin M.V., Pomazanov M.V. Black holes of a minimal size in string gravity // Int. J. Mod. Phys. D т. 10, No 2, стр. 225, 2001.
- [46] Полнарев А.Г., Хлопов М.Ю. Состояние доминирования сверхтяжелых частиц во Вселенной и первичные черные дыры // Астрономический Журнал т. 58, стр. 706, 1981.
- [47] Khloпов M.Yu., Malomed B.A., Zeldovich Ya.B. Gravitational instability of scalar fields and formation of primordial black holes // MNRAS т. 215, стр. 575, 1985.
- [48] MacGibbon J.H. Can Planck-mass relics of evaporation black holes close the universe? // Nature т. 329, стр. 308, 1987.
- [49] MacGibbon J.H., Carr B. Cosmic rays from primordial black holes // ApJ.. т. 371, стр. 447, 1991.
- [50] Markov M.A. The problem of dark matter and stable elementary black holes (maximons) // Phys.Lett. A т. 172, стр. 331, 1993.
- [51] Garfincle D., Horowitz G., Strominger A. Charged black holes in string theory (исправленное и дополненное) // Phys.Rev. D т. 45, стр. 3888, 1992.
- [52] Mignemi S., Stewart N.R. Charged black holes in effective string theory // Phys. Rev. D т. 47, стр. 5259, 1993.



- [53] Kanti P., Mavromatos N.E., Rizos J., Tamvakis K., and Winstanley E. Dilatonic Black Holes in Higher Curvature String Gravity // Phys. Rev. D т. 54, стр. 5049, 1996.
- [54] Kanti P., Tamvakis K. Colored Black Holes in Higher Curvature String Gravity // Phys. Lett. B т. 392, стр. 30, 1997.
- [55] Torii T., Yajima H., and Maeda K. Dilatonic black holes with a Gauss-Bonnet term // Phys. Rev. D т. 55, стр. 739, 1997.
- [56] Alexeyev S.O., Pomazanov M.V. Black hole solutions with dilatonic hair in higher curvature gravity // Phys. Rev. D т. 55, стр. 2110, 1997.
- [57] Bento M., Bertolami O. String generated gravity models with cubic curvature terms // Phys. Lett. B т. 228, стр. 348, 1989.
- [58] Bento M., Bertolami O., Maximally symmetric cosmological solutions of higher curvature string effective theories with dilaton // Phys. Lett. B т. 368, стр. 198, 1996.
- [59] Алексеев С., Барро О., Будул Г., Сажин М., Хованская О. Простейшая Модель Испарения Черных Дыр на Последних Стадиях // Письма в Астрономический Журнал, т. 28, No 7, стр. 489-494, 2002.
- [60] Alexeyev S., Barrau A., Boudoul G., Khovanskaya O., Sazhin M. Black-hole relics in string gravity: last stages of Hawking evaporation // Class. Quantum Grav. т. 19, стр. 4431-4443, 2002.
- [61] Alexeyev S.O., Khovanskaya O.S. Additional study of a restriction on the minimum black hole mass in string gravity // Grav. Cosmol. т.6, No 1 (21), стр. 14-18, 2000.

- [62] Kanti P., Mavromatos N.E., Rizos J., Tamvakis K., Winstanley E. Dilatonic black holes in higher curvature string gravity. II. Linear stability // Phys. Rev D т. 57, стр 6255, 1998.
- [63] Torii T., Maeda K. Stability of a dilatonic black hole with a Gauss-Bonnet term // Phys.Rev. D т. 58, стр. 084004, 1998.
- [64] Shankaranarayanan S., Padmanabhan T., and Srinivasan K. Hawking radiation in different coordinate settings: complex paths approach // Class.Quant.Grav. т. 19, стр. 2671-2688, 2000.
- [65] 'т Хуфт Дж. // Опубликовано в сборнике выступлений, посвященных Саламу: сборник выступлений, под ред. Али А., Эллиса Дж., Ранджбара-Даеми С. (Научный мир).
- [66] 't Hooft G. Dimensional reduction in quantum gravity // gr-qc/9310026
- [67] Susskind L. The world as a hologram // J. Math. Phys. т. 36, стр. 6377, 1995.
- [68] Bousso R. The holographic principle // hep-th/0203101
- [69] Fischler W., Susskind L. Holography and Cosmology // hep-th/9806039
- [70] Dine M. Towards a solution of the moduli problem of string cosmology // Phys. Lett. B т. 482, стр. 213-221, 2000.
- [71] Dine M., Rohm R., Seiberg N., Witten E. Gluino condensation in superstring models // Phys. Lett. B т. 156, стр. 55, 1985.
- [72] Banks T., Dine M. Coping with Strongly Coupled String Theory // Phys.Rev. D т. 50 стр. 7454, 1994.
- [73] Taylor T. Dilaton, Gaugino Condensation and Supersymmetry Breaking // Phys. Lett. B т. 252, стр. 59, 1990.

- [74] de Carlos B., Casas J.A., Munoz C. Supersymmetry Breaking and Determination of the Unification Gauge Coupling Constant in String Theories // Nucl. Phys. B т. 399, стр. 623, 1993.
- [75] Dine M., Affleck I. A New Mechanism for Baryogenesis // Nucl. Phys. B т. 249, стр. 361, 1985.
- [76] Dine M., Randall L., Thomas S. Baryogenesis from Flat Directions of the Supersymmetric Standard Model // Nucl. Phys. B т. 458, стр. 291, 1996.
- [77] де Вега Х., Санчес Н. // Лекции по Струнной Теории в искривленном пространстве-времени в струнной гравитации и по физическим эффектам на планковской шкале энергий (Эриче), стр. 11-63, 1995.
- [78] Davis S., Luckock The effect of higher derivative curvature terms on string quantum cosmology // Phys. Lett. B т. 485, стр. 408-421, 2001.
- [79] Hawking S. Brane New World // Phys.Rev. D т. 62, 043501 2000.
- [80] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля // М.: Наука, 1988.
- [81] Хокинг С., Эллис Дж. Крупномасштабная структура пространства-времени // Новокузнецкий физ. мат., 1998.
- [82] Мизнер Ч., Торн К., Уиллер Дж. Гравитация. Том 3. // Айнштейн, 1997.
- [83] Вейнберг С. Гравитация и космология // Платон, 2000.
- [84] Wald M. General Relativity // The University of Chicago Press, 1984.
- [85] Bekenstein J.D. The Limit of Information // Stud. Hist. Philos. Mod. Phys. т. 32, стр. 511-524, 2001.
- [86] Kofman L., Linde A., Mukhanov V. Infationary Theory and Alternative Cosmology // hep-th/0206088

- [87] Linde A. Hybrid inflation // *Phys. Rev. D*, т. 49, стр. 748, 1994.
- [88] Branoff P.R., Brill D.R. Instantons for black hole pair production // Опубликовано в трудах, посвященных Дж. Нарликару, Академия Ключера, 1999, gr- qc/9811079.
- [89] Padmanabhan T., Srinivasan K. A novel approach to particle production in an uniform electric field // *Phys. Rev. D* т. 60, стр. 2407, 1999.
- [90] Hiscock W.A. Models of evaporation black holes. II. Effects of the outgoing created radiation // *Phys. Rev.* т. 23, стр. 2823, 1981.
- [91] Blatt J.M., Weisskopf W.F. // *Theoretical Nuclear Physics* (Wiley, New York), стр. 520, 1952.
- [92] MacGibbon J.H., Webber B.R. Quark- and gluon-jet emission from primordial black holes: the instantaneous spectra // *Phys. Rev. D* т. 41, стр. 3052, 1990.
- [93] Damour T., Ruffini R. Black hole evaporation in Klein-Sauter-Heiswbnberg-Euler formalism // *Phys. Rev. D* т. 14, стр. 332, 1976.
- [94] Старобинский А. Усиление волн при отражении от вращающейся черной дыры // *ЖЭТФ* т. 64, стр.48, 1973.
- [95] Старобинский А., Чурилов С. Усиление электромагнитных и гравитационных волн при рассеянии на вращающейся черной дыре // *ЖЭТФ* т. 65, стр. 3, 1973.
- [96] Myers R.C., Simon J.Z. Black holes thermodynamics in Lovelock gravity // *Phys. Rev. D* т. 38, стр. 2434, 1988.
- [97] Myers R.C., Simon J.Z. Black hole evaporation and higher derivative gravity // *Gen. Rel. Grav.* т. 21, стр. 761, 1989.

- [98] Barrow J.D., Copeland E.J., Liddle A.R. The cosmology of black holes' relics // Phys. Rev. D т. 46, стр. 645, 1992.
- [99] Joshi P., Dadhich N., Maartens R. Why do naked singularities form in gravitational collapse? // Phys. Rev. D т.65, стр. 101501(RC), 2002.
- [100] Tseytlin A. String Solutions with Nonconstant Scalar Fields // Опубликовано в трудах Международного Симпозиума по Теории Частиц, Уэндиш-Ритц, Германия, 7-11 сентября, 1993.
- [101] Metsaev R.R., Tseytlin A.A. On loop corrections to string theory effective actions // Nucl. Phys. B т. 298, стр. 109, 1988.
- [102] Zwiebach B. Curvature squared terms and string theories // Phys.Lett. B т. 156, стр. 315, 1985.
- [103] Poisson E. Quadratic gravity as hair tonic for black holes // Class.Quant.Grav. т. 8, стр. 639, 1991.
- [104] Alexeyev S., Mignemi S. Black holes and naked singularities in low-energy limit of string gravity with modulus fields // Class. Quant. Grav. т. 18, стр. 4165, 2001.
- [105] Randall L., Sundrum R. An alternative to compactification // Phys. Rev. Lett. т. 83, стр. 4690, 1999.
- [106] Khovanskaya O.S. Dilatonic black hole time stability // Grav. Cosm. т. 8, No 3 (31), стр. 197-200, 2002.
- [107] Рубаков В. Классические калибровочные поля // М.: УРСС, 2000.
- [108] Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров // Москва, Наука, 1984.
- [109] Kofman L., Linde A., Starobinsky A. Reheating after inflation // Phys. Lett. т. 73, стр. 3195-3198, 1994.

- [110] Долгов А., Зельдович Я., Сажин М. Космология ранней Вселенной // М.: Московский Университет, 1988.
- [111] Kofman L., Linde A., Starobinsky A. Towards the theory of reheating after inflation // Phys. Rev. D т. 56, стр. 3258-3295, 1997.
- [112] Carr B., Gilbert J. Black holes relics and inflation: limits on blue perturbation spectra // Phys. Rev. D т. 50, стр. 4853-4867, 1994.
- [113] Ландау Л., Лившиц Е. Статистическая физика // М.: Мир, 1988.
- [114] Deriagin D., Grigor'ev D., Rubakov V., Sazhin M.V. Generation of gravitational waves by the anisotropic phase in the early Universe // MNRAS т. 229, стр. 357, 1987.
- [115] Кузьмин В.А., Зацепин Г.Т. Верхний предел на спектр космических лучей // Письма в ЖЭТФ т. 4, стр. 114-117, 1966.
- [116] Renault C., Afonso C., Aubourg E. at.all Observational limits on MACHOS in the Galactic Halo // Astron. Astrophys. т. 324, стр. L69, 1997.
- [117] Kim H. Primordial black holes under the double inflationary power spectrum // Phys. Rev. D т. 62, стр. 063504, 2000.
- [118] Bringmann T, Kiefer C., Polarski D. Accurate results for primordial black holes from spectra with a distinguished scale // Phys. Rev. D т.65, стр. 024008, 2002.