На правах рукописи

УДК 517.983.54

Ястребова Ирина Юрьевна

# Метод регуляризации решения задачи связанного псевдообращения

(специальность 01.01.01 – математический анализ)

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Екатеринбург–2003

Работа выполнена на кафедре математического анализа Нижегородского государственного педагогического университета.

| | |
|---|---|
| Научный руководитель: | доктор физико-математических наук, профессор Р.А. Шафиев. |
| Официальные оппоненты: | доктор физико-математических наук, профессор И.П. Рязанцева, |
| | кандидат физико-математических наук, доцент М.А. Рекант. |
| Ведущая организация: | Институт математики и механики Уральского отделения РАН. |

Защита состоится 24 декабря 2003 года в ______ часов на заседании диссертационного совета К 212.286.01 по присуждению ученой степени кандидата физико-математических наук при Уральском государственном университете имени А.М. Горького по адресу: 620083, Екатеринбург, пр. Ленина, 51, УрГУ, комн. 248.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Уральского государственного университета им. А.М. Горького.

Автореферат разослан "_____"ноября 2003 года.

Ученый секретарь диссертационного совета,
доктор физико-математических наук,
доцент В.Г. Пименов

## Общая характеристика работы

**Актуальность представляемой диссертации.** Под задачей связанного псевдообращения понимается задача нахождения нормального квазирешения одного линейного операторного уравнения в гильбертовом пространстве

$$Ax = y \tag{1}$$

на множестве псевдорешений другого –

$$Bx = z. \tag{2}$$

При отсутствии связей (2) ($B = 0$, $z = 0$) эта задача переходит в классическую задачу псевдообращения, то есть в задачу нахождения нормального псевдорешения уравнения (1). Известно, что классическая задача псевдообращения является абстрактной моделью многих некорректных задач, и ее исследование имеет давнюю и богатую историю. Фундаментальные результаты этих исследований нашли отражение в монографиях А.Н. Тихонова и В.Я. Арсенина; М.М. Лаврентьева; В.К. Иванова, В.В. Васина и В.П. Тананы; Ф.П. Васильева и многих других.

Таким образом, задача связанного псевдообращения является обобщением известной задачи, и поэтому ее изучение актуально для развития самой математики. Однако, этим ее значение не ограничивается. Как оказалось, многие содержательные некорректные задачи из различных областей знаний укладываются в рамки этой абстрактно сформулированной задачи, что делает ее изучение необходимым.

Впервые задача связанного псевдообращения поставлена в работе 1970 года японских математиков N. Minamide и K. Nakamura. В ней авторы ввели понятие суженного псевдообратного оператора, с помощью которого выписали точное решение задачи, и применили общие результаты к решению одной задачи из области оптимального управления.

В том же 1970 году к задаче связанного псевдообращения пришли В.А. Морозов и Н.Н. Кирсанова и для ее решения предложили регуляризирующий алгоритм, основывающийся на функционале А.Н. Тихонова, в котором стабилизирующая часть $\|x\|^2$ заменена на $\|Bx - z\|^2$. Исследованию этого метода посвящена книга[1)] В.А. Морозова 1974 года и переизданная в 1987 году. Однако, применение метода регуляризации В.А. Морозова ограничено требованием так называемой дополнительности операторов $A$ и $B$, что для составного оператора $\Gamma = \begin{bmatrix} B \\ A \end{bmatrix}$ означает существование на подпространстве $R(\Gamma)$ ограниченного обратного оператора $\Gamma^{-1}$. Это ограничение присутствует в работах других авторов: В.И. Мелешко, С. Джумаева, Б. Алиева, J.H. Hartung, L. Elden, C.W. Groetsch и т.д.

В ряде работ Р.А. Шафиева, результаты которых вошли затем в его книгу[2)] 1989 года, построен и исследован двупараметрический метод регуляризации, применимый к задаче связанного псевдообращения без требования дополнительности операторов $A$ и $B$. Р.А. Шафиевым, в основном, рассмотрен операторный вариант этого метода; вариационный вариант двупараметрического метода регуляризации рассмотрен его учеником М.Я. Кугелем.

Тем не менее, в этих работах не решены все проблемы, которые обычно рассматриваются при изучении любого регуляризирующего алгорит-

[1)] В.А. Морозов. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. - М.: Наука, 1987. - 360 с.

[2)] Р.А. Шафиев. Псевдообращение операторов и некоторые приложения. - Баку: Элм, 1989. - 152 с.

ма. Например, не решена проблема выбора параметров регуляризации. Поэтому дальнейшее изучение этого метода, несомненно, представляет интерес.

**Цель работы:** исследовать вариационный двупараметрический метод регуляризации задачи связанного псевдообращения; решить проблему выбора параметров регуляризации; построить конечномерный регуляризирующий алгоритм.

**Методика исследования** широко использует аппарат теории псевдообращения, теории регуляризации, а также общие результаты функционального анализа и теории возмущений.

**Научная новизна** исследования заключается в следующих основных результатах диссертации:

- установлена сходимость метода регуляризации и его устойчивость в подклассе относительно ограниченных возмущений, в котором устойчиво вычисление псевдообратного оператора $\Gamma^+$;

- исследован вспомогательный регуляризирующий алгоритм, зависящий от одного параметра $r$, который является обобщением метода регуляризации В.А. Морозова из цитируемой выше его книги, при условии обобщенной дополнительности операторов $A$ и $B$. В терминах составного оператора $\Gamma$ это условие означает существование ограниченного псевдообратного оператора $\Gamma^+$. Сформулированы и обоснованы принципы выбора параметра $r$ из вспомогательного регуляризирующего алгоритма, которые в частном случае дополнительности операторов $A$ и $B$ переходят в соответствующие результаты из книги В.А. Морозова. Получены также результаты, которые и в частном случае дополнительности операторов $A$ и $B$ являются новыми и не содержатся в книге В.А. Морозова. Это исследование в бесконечномерном случае дифференциальных свойств функции-невязки и ее степеней и установление возможности применения метода Ньютона для приближенного решения скалярного уравнения, возникающего в процессе выбора параметра $r$ по принципу невязки;

- предложен алгоритм последовательного выбора параметров регуляризации в двупараметрическом методе регуляризации. Сформулированы и обоснованы критерии последовательного выбора параметров регуляризации;
- предложена проекционная схема численного нахождения регуляризованных решений задачи связанного псевдообращения. Сформулированы и доказаны теоремы аппроксимации регуляризованных решений семейством конечномерных регуляризованных решений в случае точных и возмущенных данных;
- рассмотрено применение построенной теории к решению задачи оптимального управления с минимальными затратами энергии. Приведен пример решения задачи оптимального управления.

**Научная и практическая ценность.** Основные результаты предложенной работы являются новыми и вносят вклад в теорию методов решения некорректных задач. Работа носит как теоретический, так и прикладной характер. Полученные результаты могут быть использованы при решении экстремальных задач и многочисленных уравнений в частных производных, к которым сводится достаточно широкий круг прикладных задач.

**Апробация работы и публикации.** Основные результаты диссертации докладывались:

– на научных семинарах кафедры математического анализа Нижегородского государственного педагогического университета (1998, 1999, 2002, 2003 г.г.);

– на научных конференциях Нижегородского государственного педагогического университета (1998–2003 г.г.);

– на IV, V, VII Нижегородской сессии молодых ученых (математические науки) (г. Саров, Нижегородская область, 1999, 2000, 2002 г.г.);

– на Всероссийской научной конференции "Алгоритмический анализ неустойчивых задач" (г. Екатеринбург, 2001 г.);

– на научном семинаре "Методы оптимизации" кафедры оптимального управления факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова (руководители – проф. Ф.П. Васильев, доктор физ.-мат. наук А.С. Антипин, доц. М.М. Потапов) (2003 г.);

– на научном семинаре "Математическая теория оптимального управления" Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского (руководители – проф. В.И. Сумин, проф. М.И. Сумин) (2003 г.);

– на научном семинаре кафедры прикладной математики Нижегородского государственного технического университета (руководитель – проф. И.П. Рязанцева) (2003 г.).

Основные результаты отражены в 13 публикациях, список которых приведен в конце автореферата. В совместных работах [2,6,9], выполненных в соавторстве с Р.А. Шафиевым, личным вкладом диссертанта являются формулировки и доказательства теорем. Р.А. Шафиеву принадлежат постановки задач, идеи доказательств основных теорем и общее руководство.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы, содержащего 60 наименований. Материал диссертации изложен на 134 страницах.

## Содержание работы

В диссертации предполагается, что $A\colon X \to Y$, $B\colon X \to Z$ – замкнутые линейные операторы с непустой общей частью областей определения $D$, всюду плотной в $X$, удовлетворяющие условию обобщенной дополнительности:

$$\exists \gamma > 0: \quad \|Ax\|^2 + \|Bx\|^2 \geq \gamma^2 \|x\|^2, \quad \forall x \in D^{\perp}. \tag{3}$$

где $D^{\perp} = D \cap (N(A) \cap N(B))^{\perp}$. В частности, если (3) выполняется для всех $x \in D$, то операторы $A$ и $B$ называются дополнительными. Рассматривается задача связанного псевдообращения (основная задача): по уравнениям (1) и (2) требуется найти элемент $x^*$, удовлетворяющий условиям:

$$\begin{aligned} &x^* \in \operatorname*{Argmin}_{x \in D} \|Bx - z\| = X_1, \\ &x^* \in \operatorname*{Argmin}_{x \in X_1} \|Ax - y\| = X_A, \\ &x^* = \operatorname*{argmin}_{x \in X_A} \|x\|. \end{aligned} \tag{4}$$

Для нахождения $x^*$ – нормального связанного псевдорешения уравнения (1) (решения основной задачи) рассматривается метод регуляризации, состоящий в построении семейства $\{x_{r\alpha}\}$, $r, \ \alpha > 0$, решений вариационной задачи: $\Phi_{r\alpha}(x_{r\alpha}) = \inf\limits_{x \in D} \Phi_{r\alpha}(x)$,

$$\Phi_{r\alpha}(x) = r\|Bx - z\|^2 + \|Ax - y\|^2 + \alpha \|x\|^2. \tag{5}$$

Функционал (5) характеризуется более сложной связью с исходной задачей, чем функционал А.Н. Тихонова. В отличие от функционала А.Н. Тихонова, функционал (5) ни при каких значениях $\alpha$ и $r$ не включает в себя задачу связанного псевдообращения. Положив в (5) $\alpha = 0$, получим по существу регуляризирующий алгоритм В.А. Морозова, которым можно воспользоваться, если операторы $A$ и $B$ дополнительные. Однако и здесь возможны ситуации, когда метод В.А. Морозова не применим. Это касается случая плохой обусловленности оператора $\Gamma$. В этом случае следует использовать двупараметрический метод регуляризации подобно тому, как метод регуляризации А.Н. Тихонова используется в корректных, но плохо обусловленных задачах.

В случае приближенных данных $A_t$, $B_h$, $y_\tau$, $z_\delta$ в диссертации предполагаются выполненными следующие условия аппроксимации:

$$\begin{gathered}
\|y - y_\tau\| \le \tau, \quad \|z - z_\delta\| \le \delta, \\
\|A_t x - Ax\| \le t\left(\|x\|^2 + \|Ax\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall x \in D(A), \\
\|B_h x - Bx\| \le h\left(\|x\|^2 + \|Bx\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall x \in D(B), \\
\exists \tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}(t,h) > 0\colon \ \|A_t x\|^2 + \|B_h x\|^2 \ge \tilde{\gamma}^2 \|x\|^2 \quad \forall x \in \tilde{D}^\perp.
\end{gathered} \tag{6}$$

Известно, что при $t < 1$ и $h < 1$ операторы $A_t$ и $B_h$ – замкнутые с областями определения $D(A_t) = D(A)$, $D(B_h) = D(B)$. Поэтому, если ввести возмущенный оператор $\tilde{\Gamma} = \begin{bmatrix} B_h \\ A_t \end{bmatrix}$, то он оказывается определенным на $D$, а условия аппроксимации операторов примут вид:

$$\|\tilde{\Gamma}x - \Gamma x\|^2 \le \left(t^2 + h^2\right)\left(\|\Gamma x\|^2 + \|x\|^2\right), \quad x \in D, \tag{7}$$

$$\|\tilde{\Gamma}x\| \ge \tilde{\gamma}\|x\|, \quad x \in D \cap (N(\tilde{\Gamma}))^\perp = \tilde{D}^\perp. \tag{8}$$

Наряду с условием (7), предполагается выполненным условие "близости"сопряженных операторов:

$$\|\tilde{\Gamma}^* g - \Gamma^* g\|^2 \le (t^2 + h^2) \left(\|\Gamma^* g\|^2 + \|g\|^2\right) \quad \forall g \in D(\Gamma^*). \tag{9}$$

Известно, что "малость"возмущений (7) обеспечивает выполнение условия (8), если $N(\Gamma) = \{0\}$, и не обеспечивает, если $N(\Gamma) \neq \{0\}$. Таким образом, при выполнении условия дополнительности В.А. Морозова требование (8) излишне, оно выполняется всегда. При выполнении более общего условия (3) (8) вытекает из (7) при дополнительных ограничениях. Класс таких "малых"возмущений описан в главе I, § 1, п.3, и совпадает он с классом возмущений, обеспечивающим устойчивое вычисление псевдообратного оператора $\Gamma^+$ (см. замечания 6.1 и 6.2).

Перейдем к содержанию диссертации. Во введении обоснована актуальность темы, обозначаются направления исследования, дается краткая аннотация работы.

В главе I собраны сведения о псевдообратных операторах к замкнутым операторам, об их устойчивом вычислении в классе относительно ограниченных возмущений, и о связи с нормальными псевдорешениями уравнений. Следующие результаты главы I являются новыми.

Пусть $U\colon X \to G$ – замкнутый линейный оператор, действующий между гильбертовыми пространствами $X$ и $G$, и пусть область определения оператора $U$ всюду плотна в $X$.

**Теорема 1.2.** Пусть $T\colon X \to X$ – линейный оператор такой, что оператор $U_T = TP_{N(U)} + U^*U$, где $P_{N(U)}$ – ортопроектор на $N(U)$, имеет обратный. Тогда справедливо следующее представление псевдообратного оператора

$$U^+ g = U_T^{-1} U^* g, \quad \forall g \in D((UU^*)^+) \cap D(U^*). \tag{10}$$

**Замечание 1.11.** Если оператор $U$ нормально разрешим, то представление псевдообратного оператора (10) определено для $\forall g \in D(U^*)$ и может быть продолжено по непрерывности на все пространство $G$.

Вторая глава начинается с постановки задачи $n$-связанного псевдообращения. Установлены достаточные условия, а также необходимые и достаточные условия разрешимости этой задачи, найдены вид решений и вариационные равенства, характеризующие эти решения. Приводится $n+1$-параметрический регуляризирующий функционал. Эти результаты обобщают соответствующие результаты из цитируемой выше книги Р.А. Шафиева на случай замкнутых операторов.

При $n = 1$, то есть для задачи связанного псевдообращения (4), получены следствия:

**Следствие 3.16.** Решение основной задачи $x^*$

**1.** существует и единственно при $\forall y \in Y$ и $z \in R(B) \oplus R(B)^\perp$; при этом $x^* = B^+z + \left(AP_{N(B)}\right)^+ (y - AB^+z)$;

**2.** $x^* \in D^\perp$ и удовлетворяет соотношениям

$$(Bx^* - z,\ Bx) = 0, \quad \left(Ax^* - y,\ AP_{N(B)}x\right) = 0, \quad \forall x \in D,$$

**Теорема 4.1.** При любых $\alpha > 0$ и любых $r > 0$ экстремали функционала (5) $x_{r\alpha}$ существуют и определяются однозначно.

**Замечание 4.2.** Искомые элементы $x_{r\alpha}$ лежат в $D^\perp$.

В условиях (3), (6) и (9) доказана сходимость и устойчивость регуляризованных решений в норме графика оператора Г:

**Теорема 5.1.** Имеет место соотношение: $|x_{r\alpha} - x^*| \to 0$ при $\alpha \to 0$, $r \to \infty$, где $|x|^2 = \|Ax\|^2 + \|Bx\|^2 + \|x\|^2$.

**<u>Теорема 6.7.</u>** Если $r \to \infty$, $\delta,\ \tau,\ t,\ h,\ \alpha \to 0$ и выполняется условие согласования $rh + \sqrt{r}\delta \to 0$, то $|\tilde{x}_{r\alpha} - x^*| \to 0$.

В диссертации впервые рассматривается проблема алгоритмического выбора параметров в двупараметрическом методе регуляризации. Предложен алгоритм последовательного выбора параметров регуляризации: параметр $r$ выбирается из вспомогательного регуляризирующего алгоритма, зависящего только от параметра $r$; параметр $\alpha$ – из исходного алгоритма, в котором параметр $r$ фиксируется выбранным значением.

Вспомогательный регуляризирующий алгоритм определяется на основе функционала

$$F_r(x) = r\|Bx - z\|^2 + \|Ax - y\|^2, \quad r > 0, \tag{11}$$

как метод, состоящий в аппроксимации $x^*$ семейством $\{x_r\}$ решений вариационной задачи $F_r(x_r) = \inf\limits_{x \in D^\perp} F_r(x)$. Исследование этого метода представляет и самостоятельный интерес, так как он рассмотрен ранее В.А. Морозовым в цитируемой выше его книге при более сильном, чем (3), ограничении дополнительности операторов $A$ и $B$.

Вспомогательному регуляризирующему алгоритму (11) посвящена глава III диссертации.

Основное отличие метода (11) от метода, рассмотренного В.А. Морозовым, заключается в том, что при возмущении операторов возмущается не только функционал $F_r(x)$, но и область $D^\perp$: $\tilde{F}_r(\tilde{x}_r) = \inf\limits_{x \in \tilde{D}^\perp} \tilde{F}_r(x)$. Следовательно, $\tilde{x}_r \in \tilde{D}^\perp$, однако решение задачи (4) $x^* \in D^\perp$. Потребовалось доказательство следующего предложения.

**<u>Лемма 6.6.</u>** Для $\forall x \in D^\perp$ $\left(\forall x \in \tilde{D}^\perp\right)$ справедливо неравенство

$$\|\tilde{Q}x\| \leq\ c(t+h)\|x\| \quad \left(\|Qx\| \leq\ c'(t+h)\|x\|\right),$$

где $Q$ – ортопроектор на $N(\Gamma)$, а $c = 1 + \|\Gamma^+\|$ $\left(c' = 1 + \frac{\|\Gamma^+\|}{1-(t+h)(1+\|\Gamma^+\|)}\right)$.

Эта оценка показывает, что та часть любого вектора из $\tilde{D}^\perp$, которая не лежит в $D^\perp$, при $t \to 0$, $h \to 0$ сколь угодно мала. Этот центральный результат позволил перенести на метод (11) все, рассмотренные В.А. Морозовым, принципы выбора параметра регуляризации – это принцип невязки, обобщенный принцип невязки, принципы сглаживающего функционала и квазирешений.

Остановимся подробно на принципе невязки. Пусть $\tilde{x}^*$ – решение возмущенной задачи (4), а $\tilde{x}_*$ – решение задачи, аналогичной (4), но с измененным порядком следования уравнений. Пусть

$$\tilde{\mu}_{_B} = \|B_h\tilde{x}^* - z_\delta\|, \quad \tilde{\nu}_{_B} = \|B_h\tilde{x}_* - z_\delta\|.$$

Установлены следующие свойства функции-невязки

**<u>Лемма 8.1.</u>** Если $\tilde{\mu}_{_B} < \tilde{\nu}_{_B}$, то функция-невязка

$$\tilde{\rho}(r) = \|B_h\tilde{x}_r - z_\delta\| \tag{12}$$

непрерывна, строго монотонна на $(0,\ +\infty)$ и ее значения заполняют интервал $(\tilde{\mu}_{_B},\ \tilde{\nu}_{_B})$.

Выбор параметра $r_{_\Delta}$ по принципу невязки означает, что $r_{_\Delta}$ есть корень скалярного уравнения

$$\tilde{\rho}(r) = \Delta, \quad \tilde{\mu}_{_B} < \Delta = \bar{\mu}_{_B} + hC + \delta < \tilde{\nu}_{_B}, \tag{13}$$

где предполагаются известными числа $\bar{\mu}_{_B} \geq \mu_{_B}$ и $C$ – радиус шара, содержащего $x^*$. Доказана следующая

**<u>Теорема 9.3.</u>** Пусть параметр $r_{_\Delta}$ выбран по принципу невязки. Тогда имеем $|\tilde{x}_{r_{_\Delta}} - x^*| \to 0$ при $\Delta \to \mu_{_B}$.

Таким образом, практическая реализация выбора параметра $r_\Delta$ по принципу невязки связана с вычислением корня уравнения (13) некоторым численным алгоритмом. В диссертации показано, что к вычислению корня уравнения (13) можно применить быстросходящийся метод Ньютона.

С этой целью исследуются дифференциальные свойства функции-невязки (12) и ее степеней. При этом, так как обе пары операторов $A$, $B$ и $A_t$, $B_h$ удовлетворяют идентичным условиям (3) и (8), то и свойства возмущенной функции $\tilde{\rho}(r)$ и невозмущенной функции $\rho(r) = \|Bx_r - z\|$ оказываются одинаковыми. Поэтому, для простоты, приведем результаты для невозмущенного случая.

Сначала рассматриваются вопросы дифференцирования регуляризованных решений $x_r$ по $r$. С помощью оператора $\Gamma_r\colon X \to Z \times Y = G$ и вектора $g_r \in G$:

$$\Gamma_r x = \begin{bmatrix} \sqrt{r}Bx \\ Ax \end{bmatrix}, \quad g_r = \begin{bmatrix} \sqrt{r}z \\ y \end{bmatrix},$$

регуляризованные решения записываются в виде:

$$x_r = \Gamma_r^+ g_r. \tag{14}$$

В (14), далее, используется представление псевдообратного оператора (10). Установлен следующий результат:

**Лемма 10.2.** Абстрактная функция $x_r$, определенная равенством (14), дважды непрерывно дифференцируема в любой точке $r > 0$, причем

$$\frac{dx_r}{dr} = -\frac{1}{\sqrt{r}}\Gamma_r^+ \begin{bmatrix} Bx_r - z \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{d^2x_r}{dr^2} = -\frac{2}{\sqrt{r}}\Gamma_r^+ \begin{bmatrix} B\frac{dx_r}{dr} \\ 0 \end{bmatrix},$$

Это позволило установить справедливость теорем:

**Теорема 10.5.** При любых $r > 0$ функция $\rho(r)$ дважды непрерывно дифференцируема, $\rho'(r) = \frac{\left(B\frac{dx_r}{dr},\, Bx_r - z\right)}{\rho(r)}$, и $\rho(r)$ – выпуклая вниз функция.

**Теорема 10.6.** Функция $\rho^s(r)$ при $\forall s \geq 0$ убывающая выпуклая вниз функция, а при $-1 \leq s \leq 0$ – возрастающая выпуклая вверх.

Из этих результатов вытекает

**Следствие 11.1.** При $s \geq -1$ и $s \neq 0$ для приближенного решения скалярного уравнения

$$\|Bx_r - z\|^s = \Delta^s, \quad s \neq 0, \tag{15}$$

эквивалентного невозмущенному уравнению (13), может быть применен метод Ньютона с любым начальным приближением $r_0$: $0 < r_0 < r_\Delta$.

**Лемма 11.2.** Поправка на шаге метода Ньютона наибольшая при $s = -1$.

Возможность применения метода Ньютона для приближенного решения уравнения (15) рассмотрена В.А. Морозовым в цитируемой выше его книге лишь в конечномерном случае и при выполнении более сильного условия дополнительности операторов $A$ и $B$.

В главе IV диссертации исследован исходный регуляризирующий алгоритм (5) с фиксированным $r$, сформулированы и обоснованы принципы последовательного выбора параметров регуляризации, рассмотрена проекционная схема численного нахождения регуляризованных решений основной задачи.

Зафиксируем $r = \bar{r}$ и перепишем функционал (5) в виде:

$$\Phi_{\bar{r}\alpha}(x) = \|\Gamma_{\bar{r}}x - g_{\bar{r}}\|^2 + \alpha\|x\|^2. \tag{16}$$

Очевидно, алгоритм, состоящий в построении экстремалей функционала

(16), является методом регуляризации Тихонова вычисления регуляризованного решения (14) $x_{\bar r} = \Gamma_{\bar r}^{+} g_{\bar r}$ основной задачи (4).

Рассматривая функционал (16) как частный случай функционала (11) ( $\Gamma_{\bar r} = B$, $g_{\bar r} = z$, $A = I$, $y = 0$, $r = \frac{1}{\alpha}$), из общих результатов главы III получены следствия для метода регуляризации А.Н. Тихонова. Например, из леммы 8.1 следует, что функция

$$\tilde\varphi(\alpha) = \|\tilde\Gamma_{\bar r}\tilde x_{\bar r\alpha} - \tilde g_{\bar r}\| \tag{17}$$

непрерывная, строго возрастающая на $(0,\ +\infty)$, а ее значения заполняют интервал $(\tilde\mu_{\bar r},\ \|\tilde g_{\bar r}\|)$, где $\tilde\mu_{\bar r} = \|\tilde\Gamma_{\bar r}\tilde x_{\bar r} - \tilde g_{\bar r}\|$. Приведем один из критериев выбора обоих параметров регуляризации.

Критерий $(\tilde\rho;\ \tilde\varphi)$: в качестве параметра $r$ примем число $r_{\Delta}$, являющееся корнем уравнения (13); в качестве параметра $\alpha$ примем корень $\alpha_\sigma$ уравнения $\tilde\varphi(\alpha) = \sigma$, где $\tilde\varphi(\alpha)$ определено в (17), $\tilde\mu_{\bar r} < \sigma < \|\tilde g_{\bar r}\|$, а $\bar r = r_{\Delta}$.

Доказано, что в случае выполнения условия $\mu_{B} < \nu_{B}$ выбор параметров $r_{\Delta}$ и $\alpha_\sigma$ по критерию $(\tilde\rho;\ \tilde\varphi)$ осуществим и справедлива следующая

**Теорема 13.1.** Пусть параметры $r_{\Delta}$ и $\alpha_\sigma$ выбраны по критерию $(\tilde\rho;\ \tilde\varphi)$. Тогда $|\tilde x_{r_{\Delta}\alpha_\sigma} - x^*| \to 0$ при $\Delta \to \mu_{B},\ \sigma \to \tilde\mu_{r_{\Delta}}$.

Отметим, что случай $\mu_{B} = \nu_{B}$ не представляет для нас интереса, так как тогда основная задача вырождается в классическую задачу псевдообращения, а именно, в задачу решения системы уравнений $\begin{cases} Ax = y, \\ Bx = z. \end{cases}$ В этом случае следует положить $r = 1$, а параметр $\alpha$ выбирать по любому из принципов выбора, используемых в методе регуляризации А.Н. Тихонова.

Для построения проекционной схемы численного нахождения регуляризованных решений основной задачи в предположении, что гильбертово пространство $X$ сепарабельно, множество $D$ аппроксимируется семейством конечномерных пространств $D_n$:

1) $D_n \subset D$;

2) $\forall x \in D \quad \inf\limits_{u \in D_n} |x - u| \to 0$ при $n \to \infty$,

и определяется оператор проектирования $p_n \colon D \to D_n$ следующим образом: $p_n x = \operatorname*{argmin}\limits_{u \in D_n} |x - u| \ \ \forall x \in D$. Найдены условия, при которых точки минимума $x_{r\alpha}^{(n)}$ функционала (5), рассмотренного на $D_n$, аппроксимируют регуляризованное решение $x_{r\alpha}$.

**Теорема 14.5.** Если возмущенные данные удовлетворяют условиям (6) и (9), а параметр $r = r(n) \to \infty$ при $n \to \infty$ выбран таким, что выполняются условия согласования $\lim\limits_{n \to \infty} r(n) |\tilde{x}_{r(n)\alpha} - p_n \tilde{x}_{r(n)\alpha}| = 0$, то тогда $|\tilde{x}_{r\alpha} - \tilde{x}_{r\alpha}^{(n)}| \to 0$ при $n \to \infty$, $\alpha \to 0$ и $r = r(n)$.

В главе V предложенный метод регуляризации решения основной задачи и его конечномерный аналог применены для решения задачи оптимального управления. Рассмотрена линейная динамическая управляемая система

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = W(t)x(t) + V(t)u(t), \quad t_0 \le t \le t_1, \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

и функционалы платы

$$J_1(u) = (x(t_1) - \varphi(t_1), \ P(x(t_1) - \varphi(t_1))),$$

$$J_2(u) = \int\limits_{t_0}^{t_1} (x(t) - \varphi(t), \ Q(t)(x(t) - \varphi(t)))dt,$$

$$J(u) = \int\limits_{t_0}^{t_1} (u(t), \ R(t)u(t))dt,$$

где $W(t)$ – матричная функция порядка $\nu\times\nu$, $V(t)$ – матричная функция порядка $\nu\times\mu$, ограниченные на $[t_0,\ t_1]$ функциями, интегрируемыми с квадратом, $P$ – положительная симметрическая матрица порядка $\nu\times\nu$, $Q(t)$ – симметрическая положительная ограниченная на $[t_0,\ t_1]$ матричная функция порядка $\nu\times\nu$, $R(t)$ – симметрическая положительно определенная ограниченная на $[t_0,\ t_1]$ матричная функция порядка $\mu\times\mu$, а $\varphi(t)$ – заданная $\nu$-мерная вектор-функция наблюдения.

Пусть $H_1$ – вещественное гильбертово пространство вектор-функций из $L_2([t_0,\ t_1];\ \mathbf{R}^\mu)$ со скалярным произведением, определенным равенством: $\langle u,\ v\rangle_1 = \int\limits_{t_0}^{t_1}(u(t),\ R(t)v(t))_{\mathbf{R}^\mu}dt$. В работе 1970 года японских математиков N. Minamide и K. Nakamura поставлена следующая

**Задача оптимального управления:** найти элемент $u_0\in H_1$ такой, что

$$J_1(u_0)\le J_1(u)\quad \text{для всех}\quad u\in H_1;$$

$$J(u_0)+J_2(u_0)\le J(u)+J_2(u)\quad \text{для всех}\quad u\quad \text{таких, что}\quad J_1(u)=J_1(u_0).$$

В диссертации показано, что основная задача является математической моделью приведенной задачи оптимального управления, найдены вид операторов $A$ и $B$ и регуляризирующего функционала (5). Следствием теоремы сходимости основной задачи является следующая

**Теорема 15.4.** Экстремали $u_{r\alpha}(t)$ регуляризирующего функционала задачи оптимального управления однозначно определяются при $\forall\alpha, r>0$, а при $\alpha\to 0$ и $r\to\infty$ сходятся к $u_0(t)$ в норме пространства $H_1$:

$$\int\limits_{t_0}^{t_1}\left\|R^{1/2}(t)(u_{r\alpha}(t)-u_0(t))\right\|^2_{\mathbf{R}^\mu}dt\to 0\quad \text{при}\quad \alpha\to 0,\ r\to\infty.$$

Рассмотрена также проекционная схема решения приведенной задачи. Применение регуляризирующего алгоритма и его конечномерного варианта к решению задачи оптимального управления иллюстрируется на примере.

В заключении диссертации сформулированы основные результаты, которые приведены в пункте "Научная новизна исследования".

### Работы, опубликованные по теме диссертации


1. Ястребова И.Ю. Нормальное n-связное псевдорешение уравнения и регулярные методы его вычисления. // Н.Новгород, 1999. – 19 с. – Деп. в ВИНИТИ за № 3388-В99.

2. Шафиев Р.А., Ястребова И.Ю. Проблемы устойчивости и выбора параметров регуляризации в задаче связанного псевдообращения. // Н.Новгород, 2000. – 20 с. – Деп. в ВИНИТИ за № 954-В00.

3. Ястребова И.Ю. Выбор параметра в методе регуляризации L-псевдообращения // Четвертая нижегородская сессия молодых ученых (математические и гуманитарные науки): Тез. докл. Часть I. Н.Новгород: Нижегородский гуманитарный центр, 2000. С. 64-65.

4. Ястребова И.Ю. Численный алгоритм выбора параметра регуляризации // Пятая Нижегородская Сессия молодых ученых. Математика и математическое моделирование. Тез. докл. Саров: Изд-во СарФТИ, 2000. С. 25-26.

5. Ястребова И.Ю. Вычисление параметра регуляризации в задаче связанного псевдообращения // Алгоритмический анализ неустойчи-

вых задач: Тез. докл. Всерос. науч. конф., Екатеринбург, 26 февр.-2 марта 2001 года. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2001. С. 73-74.

6. Шафиев Р.А., Ястребова И.Ю. О критериях выбора параметров регуляризации для задачи связанного псевдообращения // Математический вестник педвузов Волго-Вятского региона. Периодический сборник научно-методических работ. Выпуск 3. Киров: Изд-во Вятского гос. пед. ун-та, 2001. С. 66-78.

7. Ястребова И.Ю. Об одной задаче оптимального управления с минимальной затратой энергии // Шестая нижегородская сессия молодых ученых (Математические науки): Тез. докл., г. Саров, 13-17 мая 2001 года. Н.Новгород: Нижегородский гуманитарный центр, 2001. С. 118-119.

8. Ястребова И.Ю. Способ вычисления параметра регуляризации // Вестник математического факультета. Н.Новгород: Изд-во НГПУ, 2001. № 1. С. 89-96.

9. Шафиев Р.А., Ястребова И.Ю. О выборе параметров в методе регуляризации L-псевдообращения // Известия вузов. Математика, 2001. № 11. С. 71-76.

10. Ястребова И.Ю. Конечномерная регуляризация задачи связанного псевдообращения // Математический вестник педвузов Волго-Вятского региона. Периодический сборник научно-методических работ. Выпуск 4. Киров: Изд-во Вятского гос. пед. ун-та, 2002. С. 57-60.

11. Ястребова И.Ю. Проекционный способ решения задачи связанного псевдообращения // Седьмая нижегородская сессия молодых уче-

ных (Математические науки): Тез. докл., 19-23 мая 2002 года. Н.Новгород: Изд. Гладкова О.В., 2002. С. 71-72.

12. Ястребова И.Ю. Алгоритм вычисления параметра регуляризации в задаче связанного псевдообращения // ЖВМ и МФ. – 2002. – Т. 42, № 10. – С. 1466-1474.

13. Ястребова И.Ю. Численная реализация регуляризирующего алгоритма // Проблемы качества подготовки учителя математики и информатики: Материалы Всероссийской научно-практической конференции, 3-4 декабря 2002 г. - Н.Новгород: Изд-во НГПУ, 2002. - С. 159-161.